

# Analisi Matematica A e B

## Soluzioni Prova scritta n. 3

Corso di laurea in Fisica, 2017-2018

9 luglio 2018

1. Si consideri per  $\alpha = 1, 2, 5, 8$  la seguente funzione funzione  $F_\alpha: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$F_\alpha(x) = \int_{x^3}^x \frac{\sin \sqrt[3]{t}}{|t|^{\frac{\alpha}{6}}} dt.$$

Dire se  $F_\alpha$  può essere estesa per continuità a tutto  $\mathbb{R}$  e in tal caso verificare se l'estensione è di classe  $C^1$ .

*Soluzione.* Poniamo

$$f_\alpha(t) = \frac{\sin \sqrt[3]{t}}{|t|^{\frac{\alpha}{6}}}$$

e osserviamo che  $f_\alpha$  è dispari:  $f_\alpha(-t) = -f_\alpha(t)$ . Dunque la funzione  $F_\alpha(x)$  è pari, in quanto facendo la sostituzione  $s = -t$ ,  $ds = -dt$  si nota che:

$$F_\alpha(-x) = \int_{-x^3}^{-x} f_\alpha(t) dt = - \int_{x^3}^x f_\alpha(-s) ds = F_\alpha(x).$$

Sarà quindi sufficiente studiare la funzione  $F_\alpha(x)$  per  $x \geq 0$ .

Osserviamo che esiste un  $\delta > 0$  tale che per ogni  $x \in [0, \delta]$  si ha  $\sin x \geq x/2$  (ad esempio si può prendere  $\delta = \pi/6$ ) mentre per ogni  $x > 0$  si ha sempre  $\sin x \leq x$ . Dunque possiamo affermare che per  $t \in [0, \delta^3]$  risulta

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{3}}}{t^{\frac{\alpha}{6}}} \leq f_\alpha(t) \leq \frac{t^{\frac{1}{3}}}{t^{\frac{\alpha}{6}}}$$

Per  $\alpha = 8$  sappiamo dunque che

$$f_8(t) \geq \frac{1}{2} \frac{t^{\frac{1}{3}}}{t^{\frac{8}{6}}} = \frac{1}{2t}$$

e di conseguenza, per  $x \rightarrow 0^+$ ,

$$F_8(x) \geq \int_{x^3}^x f_8(t) dt = \frac{1}{2} \int_{x^3}^x \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2}(\ln x - 3 \ln x) \rightarrow +\infty.$$

Dunque la funzione  $F_8(x)$  non può essere estesa con continuità a  $x = 0$ .

Se  $\alpha = 5$  si ha  $f_5(t) \leq t^{-\frac{1}{2}}$  in un intorno di  $0^+$ . Dunque, per  $x \rightarrow 0^+$ ,

$$0 \leq \int_{x^3}^x f_5(t) dt \leq \int_{x^3}^x t^{-\frac{1}{2}} dt = 2\left(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right) \rightarrow 0.$$

Per il teorema dei due carabinieri abbiamo dunque  $F_5(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow 0^+$  e per simmetria  $F_5(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow 0^-$ . Dunque  $F_5$  si estende con continuità a  $x = 0$ , ponendo  $F_5(0) = 0$ . Lo stesso vale se  $\alpha = 1$  o  $\alpha = 2$  in quanto  $0 \leq f_1(t) \leq f_2(t) \leq f_5(t)$  per  $t \in (0, 1]$  e quindi  $0 \leq F_1(x) \leq F_2(x) \leq F_5(x)$  per  $x \in (0, 1]$ .

Calcoliamo per  $x > 0$  la derivata, utilizzando il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$F_5'(x) = f_5(x) - 3x^2 f_5(x^3) = \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{x^{\frac{5}{6}}} - 3x^2 \frac{\sin x}{x^{\frac{5}{2}}} \rightarrow +\infty$$

per  $x \rightarrow 0^+$ . Questo significa che la funzione estesa non può essere derivabile in  $x = 0$  perché se lo fosse si avrebbe, per il teorema di de L'Hospital:

$$F_5'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_5(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} F_5'(h) = +\infty.$$

Per  $\alpha = 2$  abbiamo già visto che la funzione può essere estesa per continuità, come nel caso  $\alpha = 5$ . In questo caso la derivata (calcolata come nel caso precedente) è, per  $x \rightarrow 0^+$ :

$$F_2'(x) = \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} - 3x^2 \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1.$$

Per simmetria (la derivata di una funzione pari è dispari) si avrà allora:

$$F_2'(x) \rightarrow -1 \quad \text{per } x \rightarrow 0^-.$$

Ma allora  $F_2(x)$  ha un punto angoloso per  $x = 0$ , non è derivabile e tantomeno  $C^1$ .

Per  $\alpha = 1$  si ha, come nei casi precedenti che  $F_1(x)$  si estende con continuità in  $x = 0$ . Calcolando la derivata si ha, per  $x \rightarrow 0^+$ ,

$$F_1'(x) = \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{x^{\frac{1}{6}}} - 3x^2 \frac{\sin x}{x^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 0.$$

Per simmetria si avrà quindi

$$F_1'(x) \rightarrow -0 = 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0^-$$

e quindi, utilizzando il teorema di de l'Hospital per calcolare il limite del rapporto incrementale si ottiene che l'estensione continua di  $F_1(x)$  è derivabile in  $x = 0$  con derivata nulla. Per  $x \neq 0$  è chiaro che  $F_1'(x) = f_1(x) - 3x^2 f_1(x^3)$  è continua, e per  $x \rightarrow 0$  abbiamo verificato che  $F_1'(x) \rightarrow 0$ , dunque  $F_1'$  è continua e  $F_1$  è di classe  $C^1$ .  $\square$

2. Sia  $a_n = (\ln n)(\operatorname{arctg} n)(1 - \cos \frac{1}{n})$ . Studiare, al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$ , la convergenza semplice e la convergenza assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n^\alpha.$$

*Soluzione.* Per  $n \rightarrow +\infty$  si ha  $\operatorname{arctg} n \rightarrow \pi/2$  e  $\cos(1/n) = 1 - 1/(2n^2) + o(1/n^2)$  da cui

$$a_n \sim \frac{\pi \ln n}{4 n^2}.$$

Per quanto riguarda la convergenza assoluta si ha  $|(-1)^n a_n^\alpha| = a_n^\alpha$  e si ottiene quindi la serie

$$\sum a_n^\alpha$$

che, per il criterio di confronto asintotico, ha lo stesso carattere della serie

$$\sum \frac{\ln^\alpha n}{n^{2\alpha}}.$$

Sappiamo che per ogni  $\varepsilon > 0$  si ha  $\ln n \ll n^\varepsilon$  e dunque

$$\frac{\ln^\alpha n}{n^{2\alpha}} \ll \frac{1}{n^{(2-\varepsilon)\alpha}} = \frac{1}{n^p}$$

con  $p = (2 - \varepsilon)\alpha$ . Ma la serie  $\sum 1/n^p$  (serie armonica generalizzata) è convergente se  $p > 1$ . Se  $\alpha > 1/2$  sarà sempre possibile trovare un  $\varepsilon > 0$  per cui  $p > 1$ , e dunque la nostra serie sarà assolutamente convergente. Viceversa si ha

$$a_n^\alpha \sim \frac{\ln^\alpha n}{n^{2\alpha}} \gg \frac{1}{n^{2\alpha}}$$

e dunque se  $\alpha \leq 1/2$  la serie non è assolutamente convergente.

Possiamo però dimostrare che la serie converge semplicemente per ogni  $\alpha > 0$  utilizzando il criterio di Leibniz. La successione  $(-1)^n a_n^\alpha$  è a segni alterni ed è infinitesima. Rimane solo da verificare che  $a_n^\alpha$  è decrescente,

almeno per  $n$  sufficientemente grande ovvero che  $a_n$  è decrescente. Per fare ciò poniamo  $a_n = f(n)$  con

$$f(x) = \ln x \cdot \operatorname{arctg} x \cdot \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right).$$

Si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \cdot \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right) + \frac{\ln x}{1+x^2} \cdot \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right) \\ &\quad - \ln x \cdot \operatorname{arctg} x \cdot \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} \end{aligned}$$

Per  $x \rightarrow +\infty$  si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} x &= O(1), & \ln x &= o(x), \\ 1 - \cos \frac{1}{x} &= O\left(\frac{1}{x^2}\right), & \sin \frac{1}{x} &= \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} f'(x) &= O\left(\frac{1}{x^3}\right) + o\left(\frac{1}{x^3}\right) - \ln x \cdot \operatorname{arctg} x \cdot \left(\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) \\ &= O\left(\frac{1}{x^3}\right) - \frac{\ln x \cdot \operatorname{arctg} x}{x^3} \end{aligned}$$

cioè, per  $x \rightarrow +\infty$

$$x^3 f'(x) = (1 - \ln x \cdot \operatorname{arctg} x) \cdot O(1) \rightarrow -\infty.$$

Significa che per  $x$  sufficientemente grande deve essere  $f'(x) < 0$ . Dunque  $f(x)$  è decrescente per  $x$  abbastanza grande e  $a_n = f(n)$  è decrescente per  $n$  sufficientemente grande.  $\square$

### 3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (x-3)^2 y' = x(y-1), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

specificando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

*Soluzione.* Se  $x \neq 3$  e se  $y(x) \neq 1$  possiamo dividere l'equazione per  $(x-3)^2(y-1)$  per ottenere una equazione a variabili separate:

$$\frac{y'}{y-1} = \frac{x}{(x-3)^2}.$$

Passando alle primitive si ha

$$\int \frac{1}{y-1} dy = \int \frac{x}{(x-3)^2} dx.$$

Da un lato

$$\int \frac{1}{y-1} dy = \ln |y-1|$$

e dall'altro

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x-3)^2} dx &= \int \frac{x-3+3}{(x-3)^2} dx = \int \frac{1}{x-3} dx + \int \frac{3}{(x-3)^2} dx \\ &= \ln |x-3| - \frac{3}{x-3}. \end{aligned}$$

La primitiva in  $y$  è definita per  $y < 1$  e per  $y > 1$ , mentre la primitiva in  $x$  è definita per  $x < 3$  e per  $x > 3$ . Siccome abbiamo il dato iniziale in  $x = 0$  e  $y = 0$  scegliamo gli intervalli  $x < 3$  e  $y < 1$  cosicché  $|y-1| = 1-y$  e  $|x-3| = 3-x$ . Sull'intervallo  $x < 3$  le due primitive possono differire per una costante  $c \in \mathbb{R}$ :

$$\ln(1-y) = \ln(3-x) - \frac{3}{x-3} + c$$

ovvero

$$y = 1 - (3-x) \cdot e^{\frac{3}{3-x}} \cdot e^c$$

ma imponendo  $y(0) = 0$  si ottiene

$$0 = 1 - 3e \cdot e^c$$

da cui  $e^c = 1/(3e)$  e dunque

$$y(x) = 1 - \frac{3-x}{3e} \cdot e^{\frac{3}{3-x}}. \quad (1)$$

Abbiamo fin qui ottenuto che se  $y(x)$  è una soluzione del problema e se  $x < 3$  e  $y(x) < 1$  allora certamente vale (1). Ma la funzione in (1) non si avvicina mai a  $y = 1$ , dunque se  $x < 3$  la soluzione dovrà sempre soddisfare la condizione  $y(x) < 1$ . D'altra parte per  $x \rightarrow 3^-$  si osserva che  $y(x) \rightarrow -\infty$  dunque non è possibile che la soluzione possa essere estesa ad una funzione continua definita su un intervallo più grande. L'intervallo massimale di esistenza è dunque  $(-\infty, 3)$ .  $\square$