Analisi Matematica
Soluzioni prova scritta parziale n. 1

Corso di laurea in Fisica, 2018-2019

3 dicembre 2018

1. Dire per quali valori dei parametri $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ converge la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^\alpha \cdot n^{n\beta}}{(n^2)!}.$$

Soluzione. Possiamo applicare il criterio del rapporto. Si osservi che risulta:
$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)!}{n!} &= n+1, \\
\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} &= (n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \\
\frac{((n+1)^2)!}{(n^2)!} &= (n^2+2n+1)(n^2+2n)\dots(n^2+1) \\
&\geq (n^2+1)^{2n+1} \geq n^{4n}.
\end{aligned}$$

Dunque posto
$$a_n = \frac{(n!)^\alpha \cdot n^{n\beta}}{(n^2)!}$$
risulta
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{(n+1)^\alpha (n+1)^\beta \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\beta}}{n^{4n}} \sim \frac{n^{\alpha+\beta} e^\beta}{n^{4n}} \to 0$$
in quanto $n^{\alpha+\beta} \ll n^n < n^{4n}$. Visto che il rapporto di due termini consecutivi tende a zero la serie, a termini positivi, è convergente per ogni scelta dei parametri α e β. $\square$

Soluzione alternativa. Ricordando che
$$\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq n^n \tag{1}$$

si ha

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{\alpha n}{2}} \leq (n!)^{\alpha} \leq n^{\alpha n}$$

$$\left(\frac{n^2}{2}\right)^{\frac{n^2}{2}} \leq (n^2)! \leq (n^2)^{n^2}$$

quindi se a_n è la successione di cui dobbiamo fare la somma si ha

$$0 \leq a_n \leq \frac{n^{\alpha n} n^{\beta n}}{\left(\frac{n^2}{2}\right)^{\frac{n^2}{2}}}$$

da cui

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{n^{\alpha+\beta}}{\left(\frac{n^2}{2}\right)^{\frac{n}{2}}} = \frac{n^{\alpha+\beta}\left(\sqrt{2}\right)^n}{n^n} \to 0.$$

Applicando il criterio della radice possiamo concludere che la serie converge per ogni α e ogni β.

Naturalmente invece di (1) si potevano usare le disuguaglianze

$$\frac{n^n}{e^n} \leq n! \leq n^n.$$

$\square$

2. Dire per quali valori del parametro $x \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n \cdot \sqrt{n}}{n+1}$$

è convergente.

Soluzione. Studiamo innanzitutto la convergenza assoluta utilizzando il criterio della radice. Si ha

$$\sqrt[n]{\left|\frac{x^n \cdot \sqrt{n}}{n+1}\right|} = \frac{|x| \sqrt[n]{\sqrt{n}}}{\sqrt[n]{n+1}} = \frac{|x| \sqrt{\sqrt[n]{n}}}{\sqrt[n]{n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}} \to \frac{|x| \sqrt{1}}{1 \cdot 1^0} = |x|.$$

Dunque se $|x| < 1$ la serie converge assolutamente e quindi converge. Se $|x| > 1$ il termine generico della serie non è infinitesimo e quindi la serie non converge.

Per $x = 1$ si ottiene la serie

$$\sum \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

che, essendo $\frac{\sqrt{n}}{n+1} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ ha lo stesso carattere della serie $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ e dunque è divergente in quanto quest'ultima serie è una serie armonica generalizzata $\sum \frac{1}{n^p}$ che sappiamo essere divergente quando $p \leq 1$.

Per $x = -1$ si ottiene la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

Si tratta di una serie a segni alterni, infatti posto $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ risulta $a_n > 0$. Possiamo applicare il criterio di Leibniz, basterà verificare che $a_n \to 0$ e a_n decrescente. Che a_n sia infinitesima è chiaro in quanto abbiamo già osservato che $a_n \sim 1/\sqrt{n} \to 0$. Verifichiamo se è decrescente, cioè se vale:

$$a_{n+1} \leq a_n.$$

Dovrebbe essere

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+2} \leq \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

cioè, elevando ambo i membri al quadrato

$$\frac{n+1}{n^2+4n+4} \leq \frac{n}{n^2+2n+1}$$

e moltiplicando per i denominatori basterà che sia

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \leq n^3 + 4n^2 + 4n$$

ovvero, dividendo per n e semplificando:

$$0 \leq n^2 + n - 1$$

che è verificata non appena $n \geq 1$. Dunque le ipotesi del teorema di Leibniz sono verificate (definitivamente) e, di conseguenza, possiamo affermare che per $x = -1$ la serie converge (ma non assolutamente). □

3. Si consideri la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = \alpha, \\ a_{n+1} = \sqrt{|1 - a_n|}. \end{cases}$$

Per i seguenti valori del parametro α

$$\alpha = -3, \qquad \alpha = \frac{7}{16}, \qquad \alpha = 2018$$

determinare, se esiste, il limite della successione a_n.

Dimostrazione. Soluzione. Poniamo $f(x) = \sqrt{|1-x|}$. I *diagrammi a ragnatela* si possono vedere nelle pagine seguenti:

$\alpha = -3$, $\alpha = \frac{7}{16}$, $\alpha = 2018$.

Per $\alpha = -3$ si ha

$$\begin{aligned} a_1 &= -3, \\ a_2 &= \sqrt{|1-(-3)|} = 2, \\ a_3 &= \sqrt{|1-2|} = 1, \\ a_4 &= \sqrt{|1-1|} = 0, \\ a_5 &= \sqrt{|1-0|} = 1. \end{aligned}$$

E' chiaro che, essendo $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, per $k \geq 2$ si avrà $a_{2k} = 0$ e $a_{2k+1} = 1$ e dunque la successione in questo caso non ammette limite.

Consideriamo ora il caso $\alpha = \frac{7}{16}$. Osserviamo che l'intervallo $[0,1]$ è invariante in quanto se $x \in [0,1]$ anche $1-x \in [0,1]$ dunque $|1-x| = 1-x \in [0,1]$ e $f(x) = \sqrt{1-x} \in [0,1]$. Dunque essendo $\alpha \in [0,1]$ si ha $a_n \in [0,1]$ per ogni n. Inoltre su $[0,1]$ la funzione $1-x$ è decrescente e dunque $f(x) = \sqrt{1-x}$ è decrescente. Osserviamo ora che si ha:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{7}{16} \\ a_2 &= \sqrt{\left|1-\frac{7}{16}\right|} = \frac{3}{4} \\ a_3 &= \sqrt{\left|1-\frac{3}{4}\right|} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dunque

$$a_1 < a_3$$

essendo f decrescente si ha

$$a_{2k-1} < a_{2k+1} \implies a_{2k} > a_{2k+2} \implies a_{2k+1} < a_{2k+3}$$

da cui si deduce che la successione dei termini con indice dispari è strettamente crescente mentre la successione con i termini di indice pari è strettamente decrescente. Dunque entrambe le sottosuccessioni ammettono limite:

$$a_{2k} \to \ell, \qquad a_{2k-1} \to \ell'.$$

Visto che $a_n \in [0,1]$ si ha $\ell, \ell' \in [0,1]$.

Passando al limite nelle equazioni

$$a_{2k+2} = f(f(a_2k)), \qquad a_{2k+1} = f(f(a_{2k-1}))$$

si ottiene

$$\ell = f(f(\ell)), \qquad \ell' = f(f(\ell'))$$

cioè ℓ ed ℓ' sono punti fissi di $f \circ f$. Risolviamo dunque $f(f(x)) = x$. Si ottiene

$$\sqrt{1 - \sqrt{1-x}} = x$$

cioè, elevando al quadrato (e ricordando che $x \geq 0$) si ha

$$1 - \sqrt{1-x} = x^2$$

portando la radice al lato destro, x^2 al lato sinistro ed elevando ancora al quadrato (ricordando che $1 - x^2 \geq 0$) si ha

$$(1-x^2)^2 = 1 - x$$

cioè

$$x^4 - 2x^2 + x = 0.$$

Ora ricordiamoci che 0 e 1 sono punti fissi di $f \circ f$ in quanto abbiamo già osservato che $f(0) = 1$ e $f(1) = 0$. Dunque 0 e 1 sono radici di questo polinomio che può quindi essere ridotto:

$$x^4 - 2x^2 + x = x(x-1)(x^2 + x - 1).$$

Il polinomio $x^2 + x - 1$ ha due radici:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \mp \sqrt{5}}{2}.$$

La più piccola, x_1 è negativa e quindi va esclusa. La più grande x_2 è invece compresa tra 0 e 1 e quindi è ammissibile. Vogliamo in effetti dimostrare che $\ell = \ell' = x_2$. Per fare ciò osserviamo che gli intervalli $I_1 = [0, x_2]$ e $I_2 = [x_2, 1]$ sono invarianti per $f \circ f$. Infatti è facile osservare che se $0 \leq x \leq x_2$ allora $f(x) \geq x_2$ (perché f è decrescente) viceversa se $x_2 \leq x \leq 1$ allora $f(x) \leq x_2$. Questo significa che la successione a_{2k-1} dei termini di indice dispari sta tutta in I_1 in quanto $a_1 = 7/16 \leq x_2$. Viceversa la successione a_{2k} dei termini di indice pari sta tutta in I_2.

Ma abbiamo osservato che a_{2k-1} è crescente quindi $\ell \in [a_1, x_2]$ mentre a_{2k} è decrescente quindi $\ell' \in [x_2, a_2]$ da cui si può escludere che sia ℓ o ℓ' siano uguali a 0 o a 1. Rimane quindi l'unica possibilità $\ell = \ell' = x_2 = (\sqrt{5}-1)/2$.

Consideriamo ora il caso $\alpha = 2018$. La prima cosa che vogliamo dimostrare (guidati dal diagramma a ragnatela) è che prima o poi la successione a_n deve entrare nell'intervallo $[0, 1]$. E' chiaro che l'intervallo $[0, +\infty)$ è invariante in quanto $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dunque si ha $a_n \geq 0$ per ogni n. Osserviamo ora che sull'intervallo $[1, +\infty)$ si ha $f(x) = \sqrt{x-1} < x$ dunque se per assurdo si avesse $a_n \geq 1$ per ogni n si dovrebbe avere che a_n è decrescente. Ma allora a_n avrebbe limite e il limite dovrebbe essere un punto fisso. Ma non ci sono punti fissi in $[1, +\infty)$. Significa quindi che esiste un N per cui risulta $a_N < 1$ ma visto che $[0, 1]$ è invariante significa che $a_n \in [0, 1]$ per ogni $n \geq N$. Se la mia successione andasse a finire esattamente in 1 o in 0 mi ricondurrei al primo caso e quindi la successione non avrebbe limite. Possiamo però escludere che questo avvenga perché osserviamo che la regola di ricorrenza $a_{n+1} = \sqrt{a_n - 1}$ (valida finché $a_n \geq 1$) può essere invertita e ci dà:

$$a_n = 1 + a_{n+1}^2.$$

In particolare se per un certo valore N si ha che a_N è intero, allora a_n deve essere intero anche per tutti i valori precedenti $n < N$. Non solo: $a_n - 1 = a_{n+1}^2$ sarebbe un quadrato perfetto. Ma 2017 non è un quadrato perfetto, quindi questa possibilità si può escludere.

Significa quindi che ad un certo punto si ha $a_N \in (0, 1)$. Vogliamo allora dimostrare che la successione converge comunque a x_2 come nel caso precedente. Una idea per fare questo è dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo l'intervallo $I_\varepsilon = [\varepsilon, \sqrt{1-\varepsilon}]$ è invariante. Se questo è vero visto che esiste $\varepsilon > 0$ per cui $a_N \in I_\varepsilon$ si avrà $a_n \in I_\varepsilon$ per ogni $n \geq N$ e quindi se $a_n \to \ell$ (cosa che abbiamo già dimostrato nel punto precedente) dovrà essere $\ell \in I_\varepsilon$ e quindi si conclude $\ell = x_2$ visto che 0 e 1 non stanno in I_ε.

Sull'intervallo I_ε la funzione f è decrescente quindi per mostrare che I_ε è invariante è sufficiente mostrare che $f(\varepsilon) \leq \sqrt{1-\varepsilon}$ e che $f(\sqrt{1-\varepsilon}) \geq \varepsilon$. La prima disuguaglianza è una uguaglianze (il secondo estremo dell'intervallo è stato scelto appositamente). Bisogna quindi solo controllare che sia valida la seguente disuguaglianza:

$$f(\sqrt{1-\varepsilon}) \geq \varepsilon.$$

Ma $f(f(\varepsilon)) \geq \varepsilon$ è equivalente a $f(\varepsilon) \geq x_2$ che a sua volta è equivalente ad $\varepsilon < x_2$. Quindi per ogni $\varepsilon \in [0, x_2]$ risulta che l'intervallo I_ε è invariante per $f \circ f$, come volevamo dimostrare. □

3-B Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni di numeri reali tali che

$$a_1 > b_1 > 0,$$
$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},$$
$$b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}.$$

Dimostrare che, per ogni n, $a_n > b_n$ e che

$$a_{n+1} < a_n \qquad b_{n+1} > b_n$$

e calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Soluzione. Abbiamo $a_1 > b_1$. Supponiamo $a_n > b_n$ e dimostriamo $a_{n+1} > b_{n+1}$. Questo è equivalente a

$$\frac{a_n + b_b}{2} > \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$$

cioè

$$(a_n + b_n)^2 > 4a_n b_n \iff (a_n - b_n)^2 > 0.$$

Si ha allora

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} < \frac{2a_n}{2} = a_n.$$

D'altra parte

$$a_{n+1}b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}\frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} = a_n b_n$$

quindi poiché $a_{n+1} < a_n$ si ha $b_{b+1} > b_n$.
Esiste allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = \beta$$

dunque

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \to \frac{\alpha + \beta}{2}$$

e visto che $a_{n+1} \to \alpha$ si ottiene $\alpha = \beta$.
Allora $a_1 b_1 = a_n b_n$ da cui $\alpha\beta = \alpha^2$ quindi

$$\lim a_n = \lim b_n = \sqrt{a_1 b_1}.$$

□