

# Analisi Matematica A e B

## Soluzioni prova scritta parziale n. 4

Corso di laurea in Fisica, 2018-2019

17 aprile 2019

1. Determinare le soluzioni  $u(x)$  dell'equazione differenziale

$$u'' + u' - 2u = \sin x + \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

*Soluzione.* Si tratta di una equazione lineare del secondo ordine non omogenea a coefficienti costanti. Il polinomio caratteristico associato è

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2).$$

Dunque le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono:

$$u_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Per risolvere l'equazione non omogenea è sufficiente trovare una soluzione particolare. Grazie al principio di sovrapposizione possiamo trovare separatamente una soluzione particolare con termine noto  $\sin x$  e una soluzione particolare con termine noto  $\frac{e^x}{1+e^x}$ .

Per la prima soluzione particolare possiamo utilizzare il metodo di somiglianza che ci garantisce l'esistenza di una soluzione della forma

$$u_1(x) = a \sin x + b \cos x.$$

Facendo le derivate

$$\begin{aligned} u_1'(x) &= -b \sin x + a \cos x \\ u_1''(x) &= -a \sin x - b \cos x \end{aligned}$$

e sostituendo nell'equazione si ottiene:

$$(-a - b - 2a) \sin x + (-b + a - 2b) \cos x = \sin x$$

da cui imponendo

$$\begin{cases} -3a - b = 1 \\ a - 3b = 0 \end{cases}$$

si ottiene  $a = -\frac{3}{10}$  e  $b = -\frac{1}{10}$  da cui

$$u_1(x) = -\frac{3}{10} \sin x - \frac{1}{10} \cos x.$$

Per il secondo termine noto non possiamo utilizzare il metodo di somiglianza. Procediamo quindi con il metodo della variazione delle costanti. Cerchiamo una soluzione della forma

$$u_2(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-2x}.$$

Calcoliamo le derivate imponendo le opportune condizioni sulle derivate delle costanti:

$$\begin{aligned} u_2'(x) &= c_1 e^x - 2c_2 e^{-2x}, & c_1' e^x + c_2' e^{-2x} &= 0 \\ u_2''(x) &= c_1 e^x + 4c_2 e^{-2x} + c_1' e^x - 2c_2' e^{-2x} \end{aligned}$$

□

da cui, affinché valga l'equazione, si richiede

$$\begin{cases} c_1' e^x + c_2' e^{-2x} = 0, \\ c_1' e^x - 2c_2' e^{-2x} = \frac{e^x}{1+e^x} \end{cases}$$

che è equivalente a  $\begin{cases} 2I + II \\ I - II \end{cases}$

$$\begin{cases} 3c_1' e^x = \frac{e^x}{1+e^x} \\ 3c_2' e^{-2x} = -\frac{e^x}{1+e^x} \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} c_1' = \frac{1}{3} \frac{1}{1+e^x} \\ c_2' = -\frac{1}{3} \frac{e^{3x}}{1+e^x} \end{cases}$$

da cui, integrando e facendo il cambio di variabili  $e^x = t$ ,  $dx = \frac{1}{t} dt$

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{t(1+t)} dt = \frac{1}{3} \int \left[ \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right] dt = \frac{1}{3} [\ln t - \ln(1+t)] \\ &= -\frac{1}{3} \ln(1+t^{-1}) = -\frac{1}{3} \ln(1+e^{-x}) \\ c_2 &= -\frac{1}{3} \int \frac{t^2}{1+t} dt = \frac{1}{3} \int \left[ -t + 1 - \frac{1}{1+t} \right] dt \\ &= \frac{1}{3} \left[ -\frac{t^2}{2} + t - \ln(1+t) \right] = -\frac{1}{6} e^{2x} + \frac{1}{3} e^x - \frac{1}{3} \ln(1+e^x). \end{aligned}$$

Si ottiene dunque

$$u_2(x) = -\frac{1}{3} \ln(1+e^{-x}) \cdot e^x - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} e^{-x} - \frac{1}{3} \ln(1+e^x) \cdot e^{-2x}.$$

Dunque ogni soluzione dell'equazione originaria si scrive al variare di  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  nella forma:

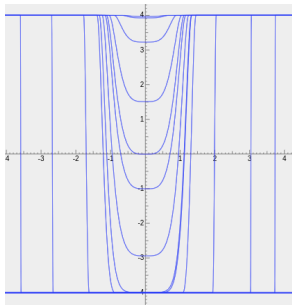
$$\begin{aligned} u(x) &= u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) \\ &= \left[ c_1 - \frac{\ln(1+e^{-x})}{3} \right] e^x + \left[ c_2 - \frac{\ln(1+e^x)}{3} \right] e^{-2x} - \frac{1}{6} + \frac{e^{-x}}{3} - \frac{3 \sin x + \cos x}{10} \end{aligned}$$

2. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 4x^3 \sqrt{16 - u^2} \\ u(0) = \lambda. \end{cases}$$

Per  $\lambda = 0$  determinare la soluzione specificando l'intervallo massimale di esistenza. Per quali valori di  $\lambda$  la soluzione è unica?

*Soluzione.* Si tratta di una equazione a variabili separabili. Osserviamo che l'equazione è definita solamente per  $|u| \leq 4$  e che le condizioni del teorema di esistenza e unicità sono verificate solamente per  $|u| < 4$ . Le funzioni costanti



$u = 4$  e  $u = -4$  sono soluzioni stazionarie dell'equazione differenziale che però non soddisfano la condizione iniziale se  $\lambda = 0$ . Se  $|u(x)| < 4$  si possono separare le variabili:

$$\frac{u'}{\sqrt{16 - u^2}} = 4x^3$$

e integrare

$$\left[ \int \frac{du}{\sqrt{16 - u^2}} \right]_{u=u(x)} = x^4 + c.$$

Risulta

$$\int \frac{du}{\sqrt{16 - u^2}} = \frac{1}{4} \int \frac{du}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{4}\right)^2}} = \arcsin \frac{u}{4}$$

da cui

$$\arcsin \frac{u(x)}{4} = x^4 + c.$$

Ponendo  $u(0) = \lambda = 0$  si ottiene  $c = 0$ . Visto che stiamo assumendo che  $|u(x)| < 4$  l'arcoseno assumerà valori nell'intervallo  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  e dunque la nostra soluzione è valida se  $x^4$  è in tale intervallo cioè se

$$|x| < \sqrt[4]{\frac{\pi}{2}}.$$

Con questa condizione la soluzione si scrive nella forma:

$$u(x) = 4 \sin(x^4).$$

Osserviamo però che se  $x$  tende agli estremi dell'intervallo la funzione  $u(x)$  tende a 4 con derivata che (necessariamente) tende a zero. Dunque la funzione può essere incollata alla soluzione stazionaria e dunque la soluzione massimale è definita su tutto  $\mathbb{R}$  come segue:

$$u(x) = \begin{cases} 4 \sin(x^4) & \text{se } |x| < \sqrt[4]{\frac{\pi}{2}}, \\ 4 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per  $\lambda = 0$  la soluzione è unica in quanto la funzione una volta arrivata al valore  $u = 4$  per  $x \geq 0$  non può assumere valori superiori a 4 in quanto l'equazione differenziale non sarebbe definita e non può assumere valori inferiori a 4 in quanto  $u'(x) \geq 0$  se  $x \geq 0$ . Discorso analogo si può fare per  $x \leq 0$ .

Per gli altri valori di  $\lambda \in [-4, 4]$  si può ripetere lo stesso ragionamento e trovare la soluzione che risulta essere univocamente definita se  $\lambda \in (-4, 4]$ . Se  $\lambda = -4$  la soluzione può percorrere la soluzione  $u = -4$  per un tempo arbitrario e poi

staccarsi seguendo la curva  $u(x) = 4 \sin(x^4 + c)$  per un opportuno valore di  $c$  e quindi attaccarsi alla soluzione  $u = 4$ . Dunque esistono infinite soluzioni se  $\lambda = -4$ . Chiaramente se  $|\lambda| > 4$  non ci sono soluzioni perché l'equazione non è definita nel punto iniziale.

□

3. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = (u^2 - 1)^3 \\ u(0) = \lambda. \end{cases}$$

Per  $\lambda = 0$  si dimostri che la soluzione massimale è una funzione definita su tutto  $\mathbb{R}$  e si determinino i limiti a  $\pm\infty$ . Se ne studi la convessità, si dimostri che la funzione è dispari e se ne scriva il polinomio di Taylor di ordine 4 centrato in 0.

Per  $\lambda = 2$  si studi la convessità della soluzione e si dimostri che la soluzione massimale ha un asintoto verticale. Facoltativo: si dia una stima del valore dell'ascissa dell'asintoto verticale.

*Soluzione.* Si tratta di una equazione a variabili separabili, autonoma. Il teorema di esistenza e unicità locale è soddisfatto ovunque. Le funzioni  $u(x) = 1$  e  $u(x) = -1$  sono soluzioni stazionarie e non possono essere attraversate da altre soluzioni. Dunque se  $\lambda \in (-1, 1)$  la soluzione massimale deve avere esistenza globale e rimanere compresa tra  $-1$  e  $1$ . In tale regione si ha  $u' < 0$ . Le soluzioni dunque sono strettamente decrescenti ed hanno quindi asintoto per  $x \rightarrow \pm\infty$ . L'asintoto non può che essere  $u = 1$  per  $x \rightarrow -\infty$  e  $u = -1$  per  $x \rightarrow +\infty$  perché se  $u \rightarrow \ell$  allora  $u' = (u^2 - 1)^3 \rightarrow (\ell^2 - 1)^3$  e in presenza di un asintoto orizzontale l'unico possibile valore per il limite di  $u'$  è 0. La derivata seconda soddisfa l'equazione:

$$u''(x) = 3(u^2 - 1)^2 \cdot 2uu' = 6u(u^2 - 1)^5.$$

Dunque  $u''(x) \geq 0$  se  $u \geq 1$  oppure se  $-1 \leq u \leq 0$ . Per  $\lambda = 0$  la soluzione è strettamente decrescente, ed è quindi negativa per  $x > 0$  e positiva per  $x < 0$ . Dunque è convessa per  $x \geq 0$  e concava per  $x \leq 0$ . La funzione è dispari in quanto se poniamo  $v(x) = -u(-x)$  si ha  $v(0) = -u(0) = 0$  e

$$v'(x) = u'(-x) = (u^2(-x) - 1)^3 = (v^2(x) - 1)^3$$

e dunque  $v$  soddisfa lo stesso problema di Cauchy che definisce  $u$ . Essendo la soluzione unica si ha  $v(x) = u(x)$  per ogni  $x$  e quindi  $u(x) = -u(-x)$  cioè  $u$  è dispari.

Proseguendo con le derivate si ha

$$u'''(x) = 6u'(u^2 - 1)^5 + 6u \cdot 5(u^2 - 1)^4 \cdot 2uu' = 6(u^2 - 1)^8 + 60u^2(u^2 - 1)^7.$$

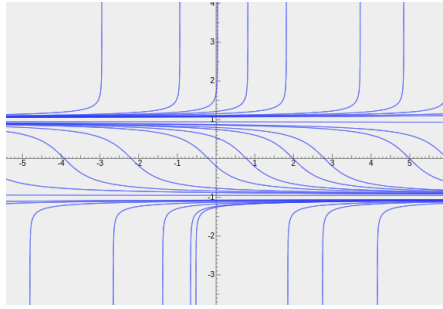
Dunque

$$u(0) = 0, u'(0) = -1, u''(0) = 0, u'''(0) = 6.$$

Visto che  $u$  è dispari certamente  $u^{(4)}(0) = 0$ . Dunque il polinomio di Taylor di ordine 4 è

$$P(x) = -x + \frac{6}{3!}x^3 = -x + x^3.$$

Nel caso  $\lambda = 2$  sappiamo che la soluzione non potrà attraversare la soluzione  $u = 1$  e dunque sarà  $u(x) > 1$ . Ma allora  $u' > 0$  e quindi  $u$  è strettamente



crescente. La soluzione massimale sarà definita su tutta la semiretta  $(-\infty, 0]$  e avrà un asintoto orizzontale per  $x \rightarrow -\infty$ . Necessariamente l'asintoto è  $u = 1$  come abbiamo già osservato. Dunque l'intervallo massimale di esistenza è della forma  $(-\infty, x_0)$  e ci chiediamo se  $x_0$  è finito o  $+\infty$ . Per  $x \rightarrow x_0^-$  certamente  $u(x) \rightarrow +\infty$ .

Si può confrontare la soluzione  $u(x)$  con la soluzione  $v(x)$  di una equazione che sappiamo risolvere più semplicemente. Per  $x \geq 0$  si ha  $u(x) \geq u(0) = 2$  in quanto  $u$  è crescente, dunque  $u^2 \geq 4$  e quindi

$$u^2 - 1 \geq \frac{3}{4}u^2$$

da cui

$$u' = (u^2 - 1)^3 \geq \left(\frac{3}{4}u^2\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 u^6.$$

Dunque  $u(x) \geq v(x)$  se  $v(x)$  risolve il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} v'(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 v^6 \\ v(0) = 2. \end{cases}$$

La soluzione  $v(x)$  si calcola esplicitamente e si trova

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^5(x)} &= \frac{1}{2^5} - 5 \left(\frac{3}{4}\right)^3 x \\ v(x) &= \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{2^5} - 5 \left(\frac{3}{4}\right)^3 x}} \end{aligned}$$

dunque la funzione  $v$  presenta un asintoto per  $x = \frac{2}{135}$  e quindi anche  $u$  deve avere un asintoto verticale nel punto  $x_0 \leq \frac{2}{135}$ .

Viceversa

$$(u^2 - 1)^3 = u^6 - 3u^4 + 3u^2 - 1 \leq u^6 - 3u^2(u^2 - 1) \leq u^6.$$

Procedendo in modo simile a quanto fatto in precedenza possiamo affermare che la nostra soluzione è minore della soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} v'(x) = v^6 \\ v(0) = 2. \end{cases}$$

che ha come soluzione

$$v = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{2^5} - 5x}}$$

che ha un asintoto per  $x = \frac{1}{160}$  e quindi possiamo concludere che  $x_0 \geq \frac{1}{160}$ .

In alternativa possiamo utilizzare il metodo di separazione delle variabili possiamo quindi scrivere:

$$\int_0^{x_0} \frac{u'(x)}{(u^2(x) - 1)^3} dx = \int_0^{x_0} 1 dx = x_0$$

nell'integrale a sinistra facciamo il cambio di variabile  $u = u(x)$  ottenendo quindi (ricordiamo che  $u(0) = \lambda = 2$  e  $u(x) \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow x_0$ ):

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{(u^2 - 1)^3} du = x_0.$$

Visto che  $(u^2 - 1)^3 \sim u^6$  per  $u \rightarrow +\infty$  l'integrale improprio è convergente e quindi  $x_0$  è finito. Questo significa che la soluzione ha un asintoto verticale per  $x \rightarrow x_0^-$ .

Come in precedenza la formula precedente ci consente anche di stimare il valore di  $x_0$ . Possiamo infatti usare le disuguaglianze

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 u^6 \leq (u^2 - 1)^3 \leq u^6$$

e dunque essendo

$$\int_2^{+\infty} \frac{du}{u^6} = \left[ \frac{1}{-5u^5} \right]_2^{+\infty} = \frac{1}{160}$$

si ottiene

$$\frac{1}{160} \leq x_0 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{1}{160} = \frac{2}{135}.$$

□