Analisi Matematica A e B
Soluzioni prova scritta n. 2

Corso di laurea in Fisica, 2018-2019

26 giugno 2019

1. Dire se la serie
$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}}$$
è convergente ed eventualmente calcolarne la somma.

Soluzione. Si può osservare che la serie è telescopica, infatti si ha:
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\frac{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} &= \sum_{k=1}^{N}(-1)^k\frac{1}{\sqrt{k}}+\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\frac{1}{\sqrt{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{N}(-1)^k\frac{1}{\sqrt{k}}-\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}\frac{1}{\sqrt{k+1}} \\ &= (-1)\frac{1}{\sqrt{1}}-(-1)^{N+1}\frac{1}{\sqrt{N+1}}\end{aligned}$$
e per $N\to+\infty$ si ottiene che la serie data converge e la sua somma è -1.

In alternativa possiamo dimostrare che la serie converge (senza trovare però il valore della somma) utilizzando il criterio di Leibniz per le serie a segni alterni. Osservando che la serie può essere scritta nella forma $\sum(-1)^k a_k$ con
$$a_k=\frac{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}}=\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$
è evidente che $a_k\to 0$ ed è decrescente.

Volendo è anche possibile porre $a_k=f(k)$ con
$$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}},\qquad x\in(0,+\infty)$$
e verificare che $f'(x)<0$ per ogni $x\geq 1$. □

2. Calcolare, al variare di $\alpha > 0$, se esiste,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x - \displaystyle\int_1^{x^\alpha} e^{\frac{1}{t}}\,dt}{\ln x}.$$

Soluzione. Per $t \geq 1$ si ha

$$1 + \frac{1}{t} \leq e^{\frac{1}{t}} \leq e$$

dunque, integrando tra 1 e x^α

$$x^\alpha - 1 + \ln x^\alpha \leq \int_1^{x^\alpha} e^{\frac{1}{t}}\,dt \leq e(x^\alpha - 1)$$

da cui, per $x > 1$

$$\frac{x - ex^\alpha - e}{\ln x} \leq \frac{x - \displaystyle\int_1^{x^\alpha} e^{\frac{1}{t}}\,dt}{\ln x} \leq \frac{x - x^\alpha + 1 - \alpha\ln x}{\ln x}.$$

Si osserva allora che se $\alpha > 1$ il lato destro della disuguaglianza precedente tende a $-\infty$ e quindi, per confronto, il limite richiesto è $-\infty$. Se $\alpha < 1$ il lato sinistro tende a $+\infty$ e quindi il limite richiesto è $+\infty$.

Rimane da trattare il caso $\alpha = 1$. In tal caso possiamo osservare, utilizzando sempre le disuguaglianze precedenti, che il numeratore del limite richiesto tende a $-\infty$ in quanto

$$x - x^\alpha + 1 - \alpha\ln x = 1 - \ln x \to -\infty.$$

Possiamo quindi applicare il teorema di de l'Hospital per ottenere che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x - \displaystyle\int_1^{x^\alpha} e^{\frac{1}{t}}\,dt}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to0^+} \frac{1 - e^y}{y} = -1.$$

Osservazione. Il teorema di de l'Hospital si può applicare, nel caso in cui il denominatore di un rapporto tenda a $+\infty$ anche senza alcuna informazione sul numeratore. Dunque era lecito (spiegandone il motivo) applicare il teorema di de l'Hospital direttamente al limite dato per qualunque α, senza fare ulteriori verifiche. □

3. (a) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, esiste finito

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x^\alpha}{x^\beta\sqrt{1 - x^{2\alpha}}}\,dx.$$

(b) Calcolare esplicitamente l'integrale quando $\beta = 1 - \alpha$.

Soluzione. Si tratta di un integrale improprio la cui convergenza va messa in discussione per $x \to 0^+$ e $x \to 1^-$. Per $x \to 0^+$ si ha

$$\frac{\arcsin x^\alpha}{x^\beta \sqrt{1 - x^{2\alpha}}} \sim \frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha - \beta}$$

e dunque l'integrale è convergente in un intorno di 0^+ se $\alpha - \beta > -1$.

Per $x \to 1$ la formula di Taylor al primo ordine (ovvero la derivabilità) ci dice che

$$x^{2\alpha} = 1 + 2\alpha(x-1) + o(x-1)$$

e dunque

$$\frac{\arcsin x^\alpha}{x^\beta \sqrt{1 - x^{2\alpha}}} \sim \frac{\arcsin 1}{\sqrt{1 - (1 + 2\alpha(x-1))}} \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2\alpha}\sqrt{1-x}} \qquad \text{per } x \to 1^-.$$

Significa che l'integrale è convergente, in un intorno di 1^-, per qualunque $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

Nel complesso, dunque, l'integrale è convergente per ogni $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha > \beta + 1$.

In alternativa. Per determinare la convergenza dell'integrale in un intorno di 1^- si può effettuare un cambio di variabile. Posto $1 - x^{2\alpha} = t$ si ha

$$x = (1-t)^{\frac{1}{2\alpha}}, \qquad dx = -\frac{1}{2\alpha}(1-t)^{\frac{1}{2\alpha}-1}\, dt$$

da cui

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^{2\alpha}}}\, dx = -\int_{1-a^{2\alpha}}^0 \frac{1}{2\alpha\sqrt{t}}(1-t)^{\frac{1}{2\alpha}-1}\, dt$$

che è convergente per ogni $\alpha > 0$.

Nel caso $\beta = 1 - \alpha$ dobbiamo calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x^\alpha}{x^{1-\alpha}\sqrt{1-x^{2\alpha}}}\, dx$$

ma osservando che si ha

$$(\arcsin x^\alpha)' = \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\sqrt{1-x^{2\alpha}}}$$

otteniamo

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x^\alpha}{x^{1-\alpha}\sqrt{1-x^{2\alpha}}}\, dx = \left[\frac{1}{\alpha}\frac{(\arcsin x^\alpha)^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2\alpha} = \frac{\pi^2}{8\alpha}.$$

□