Analisi Matematica A e B
Soluzioni prova scritta n. 3

Corso di laurea in Fisica, 2018-2019

16 luglio 2019

1. Al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n^5}{n+1}} + \alpha n^2 + \beta n.$$

Soluzione. Ricordando che per $x \to 0$ si ha

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$$

per $n \to +\infty$ risulta

$$\sqrt{\frac{n^5}{n+1}} = n^2\sqrt{\frac{n}{n+1}} = n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} = n^2\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
$$= n^2 - \frac{n}{2} + \frac{3}{8} + o(1)$$

da cui il limite richiesto risulta uguale a

$$\lim_{n\to+\infty} (\alpha+1)n^2 + \left(\beta - \frac{1}{2}\right)n + \frac{3}{8} + o(1).$$

Chiaramente se $\alpha > -1$ il limite è $+\infty$, se $\alpha < -1$ il limite è $-\infty$. Se $\alpha = -1$ e $\beta > \frac{1}{2}$ il limite è $+\infty$, se $\alpha = -1$ e $\beta < \frac{1}{2}$ il limite è $-\infty$. Se $\alpha = -1$ e $\beta = \frac{1}{2}$ il limite è $\frac{3}{8}$. $\square$

2. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ risulta convergente l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \cdot \ln(e^x + x^\alpha)}\, dx.$$

Soluzione. La funzione integranda è continua e quindi localmente integrabile sull'intervallo aperto $(0, +\infty)$. Dobbiamo capire l'andamento asintotico per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$. Si ha

$$\ln\left(e^x + x^\alpha\right) = \ln\left(e^x\left(1 + \frac{x^\alpha}{e^x}\right)\right) = x + \ln\left(1 + \frac{x^\alpha}{e^x}\right).$$

Per $x \to 0^+$ (ricordando che $\ln(1+y) = y + o(y)$ se $y \to 0$) si ha

$$\frac{1}{x^\alpha \cdot \ln\left(e^x + x^\alpha\right)} = \frac{1}{x^{\alpha+1} + \frac{x^{2\alpha}}{e^x} + o\left(\frac{x^{2\alpha}}{e^x}\right)} \sim \begin{cases} \frac{1}{x^{\alpha+1}} & \text{se } \alpha \geq 1 \\ \frac{1}{x^{2\alpha}} & \text{se } \alpha < 1. \end{cases}$$

Per confronto asintotico l'integrale è quindi convergente in un intorno di 0^+ se e solo se $\alpha < \frac{1}{2}$.

Per $x \to +\infty$ risulta

$$\ln\left(1 + \frac{x^\alpha}{e^x}\right) \to 0$$

e quindi

$$\frac{1}{x^\alpha \cdot \ln\left(e^x + x^\alpha\right)} = \frac{1}{x^{\alpha+1} + x^\alpha \cdot o(1)} \sim \frac{1}{x^{\alpha+1}}$$

Per confronto asintotico l'integrale risulta essere sempre convergente in un intorno di $+\infty$ essendo per ipotesi $\alpha > 0$.

Concludiamo quindi che l'integrale dato è convergente se $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. $\square$

3. Data l'equazione differenziale

$$xu' = u \ln u$$

studiare i relativi problemi di Cauchy

$$u(0) = 2$$
$$u(0) = 1$$
$$u(1) = 2$$

precisando se si ha esistenza e unicità della soluzione, e, qualora esista la soluzione, quale sia l'intervallo massimale di esistenza.

Dimostrazione. Necessariamente deve essere $u(x) > 0$ affinché l'equazione abbia senso. Per $x = 0$ il lato sinistro si annulla e quindi si deve avere $u(0) = 1$ affinché anche il lato destro si annulli. Si capisce quindi che la condizione $u(0) = 2$ è impossibile (non esistono soluzioni) mentre la condizione $u(0) = 1$ è necessaria.

Nei punti in cui $u(x) \neq 1$ e $x \neq 0$ è possibile separare le variabili per ottenere

$$\frac{u'}{u \ln u} = \frac{1}{x}$$

integrando ambo i membri si ottiene quindi, su ogni intervallo in cui $u(x) \neq 1$ e $x \neq 0$:

$$\ln |\ln u| = \ln |x| + c$$

ovvero

$$|\ln u| = e^c \cdot |x|$$

cioè

$$\ln u = \pm e^c \cdot |x| \, .$$

Posto $k = \pm e^c$ abbiamo che $k \neq 0$ e si ha

$$u(x) = e^{k|x|}.$$

Ora osserviamo che la costante k può essere scelta in maniera indipendente sugli intervalli $x > 0$ e $x < 0$. In effetti qualunque sia k osserviamo che l'espressione che abbiamo trovato è continua anche per $x = 0$. Affinché sia derivabile in $x = 0$ dobbiamo scegliere la costante k di segno opposto per $x > 0$ e per $x < 0$ cosicché si ottiene

$$u(x) = e^{kx}.$$

Questa funzione soddisfa l'equazione differenziale anche per $x = 0$ e si ha $u(0) = 1$ qualunque sia $k \in \mathbb{R}$. Abbiamo quindi infinite soluzioni definite per ogni $x \in \mathbb{R}$ con la condizione $u(0) = 1$. Se invece imponiamo la condizione $u(0) = 2$ deve essere $k = \ln 2$ e quindi

$$u(x) = e^{x \ln 2} = 2^x$$

è l'unica soluzione, definita su tutto $\mathbb{R}$.

Quanto abbiamo trovato è compatibile con il teorema di esistenza e unicità (Cauchy-Lipschitz). Per $x = 0$, infatti, l'equazione non può essere messa in forma normale e quindi il teorema non si applica (e infatti non c'è né esistenza né unicità). Per $x \neq 0$, invece, c'è esistenza e unicità sugli intervalli $x \neq 0$ dove l'equazione può essere messa in forma normale. $\square$