Analisi Matematica A e B
Soluzioni prova scritta n. 5

Corso di laurea in Fisica, 2018-2019

13 gennaio 2020

1. Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x) + \ln(e^x - x) - \frac{1}{6}\arctan(x^3)}{x^2 - \sin^2 x}$$

Soluzione. Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $x \to 0$:

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \\
\sin^2 x &= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) \\
x^2 - \sin^2 x &= \frac{x^4}{3} + o(x^4) \\
\ln t &= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4) \\
\ln(\cos x) &= \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) \\
&= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2))^2 + o(x^4)\right) \\
&= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4) \\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\
\ln(e^x - x) &= \ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) \\
&= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 + o(x^4) \\
&= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)
\end{aligned}$$

$$\operatorname{arctg} t = t + o(t^2)$$
$$\operatorname{arctg}(x^3) = x^3 + o(x^4)$$

da cui

$$\frac{\ln(\cos x)+\ln(e^x-x)-\frac{1}{6}\arctan(x^3)}{x^2-\sin^2 x} = \frac{-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{6}+o(x^4)}{\frac{x^4}{3}+o(x^4)}$$
$$= \frac{-\frac{x^4}{6}+o(x^4)}{\frac{x^4}{3}+o(x^4)} = \frac{-\frac{1}{6}+o(1)}{\frac{1}{3}+o(1)} \to -\frac{1}{2}.$$

□

2. Data l'equazione differenziale

$$u'(x) + \frac{u(x)}{x} = x^2$$

scriverne le soluzioni definite su $(0,+\infty)$ e calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, se esiste, il

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{u(x)}{x^\alpha}$$

Dimostrazione. Osservando che per $x > 0$ si ha $e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = x$ moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione per il fattore integrante x:

$$xu' + u = x^3$$

cioè

$$(xu)' = x^3$$

da cui, integrando,

$$xu = \frac{x^4}{4} + c$$

ovvero

$$u(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{c}{x}.$$

Per $x \to +\infty$ si ha quindi

$$\frac{u(x)}{x^\alpha} = \frac{x^{3-\alpha}}{4} + \frac{c}{x^{\alpha+1}} \to \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{se } \alpha = 3, \\ 0 & \text{se } \alpha > 3, \\ +\infty & \text{se } \alpha < 3. \end{cases}$$

□

3. Data la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \cdot (n!)^3 \cdot \ln n}{(3n)!}$$
studiarne, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la convergenza assoluta e semplice.

Soluzione. Posto
$$a_n = \frac{x^n}{(n!)^3 \ln n}(3n)!$$
risulta
$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|\,(n+1)^3 \ln(n+1)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)\ln n} \to \frac{|x|}{27}.$$
Dunque, per il criterio del rapporto, la serie converge assolutamente se $|x| < 27$ e non converge, neanche semplicemente se $|x| > 27$ (in quanto a_n non è infinitesimo). Se $|x| = 27$ si osserva che
$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{9(n+1)^2 \ln(n+1)}{(3n+1)(3n+2)\ln n} > \frac{9n^2 + 18n + 9}{9n^2 + 9n + 2} > 1.$$
Dunque $|a_{n+1}| > |a_n|$ e la successione $|a_n|$ è quindi strettamente crescente e non può tendere a zero. Dunque a_n non tende a zero e, mancando la condizione necessaria per la convergenza, possiamo affermare che la serie non converge neanche semplicemente. □