Analisi Matematica
Soluzioni prova scritta parziale n. 3

Corso di laurea in Fisica, 2019-2020

29 aprile 2020

1. Trovare le soluzioni dell'equazione

$$u'' + 2u' + u = \frac{\ln x}{e^x}$$

Soluzione. Polinomio associato

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$$

soluzioni dell'equazione omogenea

$$c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}.$$

Cerchiamo una soluzione della non-omogenea della forma:

$$c_1(x) e^{-x} + c_2(x) x e^{-x}$$

con il metodo della variazione delle costanti:

$$\begin{gathered} c_1' e^{-x} + c_2' x e^{-x} = 0 \\ -c_1' e^{-x} + c_2'(1-x)e^{-x} = \ln x e^{-x} \end{gathered}$$

da cui

$$c_2' = \ln x, \qquad c_1' = -x \ln x$$

quindi possiamo scegliere

$$\begin{aligned} c_2(x) &= x\ln x - x, \\ c_1(x) &= -\int \ln x \, dx = -\left[\frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx\right] \\ &= -\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4}. \end{aligned}$$

Ogni soluzione dell'equazione non omogenea si scrive quindi nella forma

$$\begin{aligned} &ae^{-x} + bxe^{-x} + \left(-\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4}\right)e^{-x} + (x\ln x - x)\,e^{-x} \\ = &\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3}{4}x^2 + a + bx\right)e^{-x} \end{aligned}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. $\square$

2. Trovare le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 2(x+1)\sqrt[3]{u^2} \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

Scrivere le soluzioni di classe C^∞. Ci sono altre soluzioni? (nel caso descriverle brevemente).

(più difficile) Determinare l'insieme

$$\{u(-2) \colon u \text{ soluzione del problema di Cauchy}\}.$$

Soluzione. Una soluzione di classe C^∞ è la soluzione stazionaria $u(x) = 0$. Ma visto che le ipotesi di Cauchy-Lipschitz non sono soddisfatte in un intorno dei punti della retta $u = 0$ non possiamo escludere che ci siano altre soluzioni che assumono valori diversi da zero. Dove u è diversa da zero possiamo dividere ambo i membri dell'equazione per $\sqrt[3]{u^2}$ per separare le variabili:

$$u' u^{-\frac{2}{3}} = 2(x+1)$$

da cui, integrando,

$$3\sqrt[3]{u(x)} = x^2 + 2x + c$$

ovvero

$$u(x) = \left(\frac{x^2+2x+c}{3}\right)^3. \tag{1}$$

Se imponiamo $u(1) = 0$ otteniamo $c = -3$ da cui si trova una seconda soluzione di classe C^∞:

$$u(x) = \left(\frac{x^2+2x-3}{3}\right)^3.$$

Scegliendo altri valori della costante c è però possibile incollare le soluzioni appena trovate con la soluzione stazionaria. La funzione (1) può essere negativa in un intorno simmetrico del punto $x = -1$ (infatti $x^2 + 2x + c$ ha come grafico una parabola di asse $x = -1$). Invece tale funzione è positiva su due semirette intorno di $-\infty$ e $+\infty$. Affinché la soluzione si annulli per $x = 1$ la parte negativa della soluzione (se c'è) deve annullarsi negli estremi di un intervallo $[-1-a, -1+a]$ con $-1+a \le 1$. Invece la parte positiva deve annullarsi nell'estremo sinistro di un intervallo $[b, +\infty)$ con $1 \le b \le +\infty$ e sull'estremo destro di un intervallo $(-\infty, d]$ con $-\infty \le d \le -1-a$. Dunque tutte le soluzioni del problema di Cauchy possono essere scritte nella forma

$$u(x) = \begin{cases} \left(\frac{x^2+2x-d^2-2d}{3}\right)^3 & \text{per } x < d \\ 0 & \text{per } d \le x \le -1-a \\ \left(\frac{x^2+2x-(a-1)^2-2(a-1)}{3}\right)^3 & \text{per } -1-a < x < -1+a \\ 0 & \text{per } -1+a \le x \le b \\ \left(\frac{x^2+2x-b^2-2b}{3}\right)^3 & \text{per } x > b \end{cases}$$

con $a \le 2$, $1 \le b \le +\infty$, $-\infty \le d \le -1-a$. Il valore minimo che può assumere la funzione nel punto $x = -2$ è quello che si ottiene quando $-2 \in [-1-a, -1+a]$ con a più grande possibile cioè $a = 2$. In tal caso si ottiene

$$u(-2) = \left[\left(\frac{x^2+2x-3}{3}\right)^3\right]_{x=-2} = -1.$$

Il valore massimo si ottiene invece quando $-2 \in (-\infty, d]$ con d più grande possibile, ovvero $a = 0$, $d = -1 - a = -1$. In tal caso si ottiene

$$u(-2) = \left[\left(\frac{x^2 + 2x + 1}{3} \right)^3 \right]_{x=-2} = \frac{1}{27}.$$

Tutti i valori intermedi possono essere ottenuti scegliendo i parametri intermedi dunque

$$\{u(-2)\colon u \text{ soluzione del pb. di Cauchy}\} = \left[-1, \frac{1}{27} \right].$$

□

3. Studiare, al variare del parametro $p > 0$, la convergenza semplice e la convergenza assoluta dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi x) \cdot \ln x}{x^p}\, dx.$$

Per quali $p > 0$ c'è convergenza assoluta? Per quali $p > 0$ c'è convergenza semplice ma non assoluta?

(Facoltativo) Cosa succede per $p \leq 0$?

Soluzione. L'integrale può presentare problemi solamente per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$ in quanto la funzione integranda è definita e continua su tutto l'intervallo aperto $(0, +\infty)$.

Per $x \to 0^+$ si ha

$$\frac{\sin(\pi x) \ln x}{x^p} \sim -\pi \frac{\ln x}{x^{p-1}}$$

e sappiamo (per verifica diretta) che quest'ultima funzione ha integrale finito in un intorno di 0 se e solo se $p-1 < 1$ cioè $p < 2$. Dunque sull'intervallo $(0, 1]$ la funzione è integrabile (semplicemente e assolutamente) se e solo se $p < 2$.

Per $p \to +\infty$ la funzione cambia segno frequentemente. Per quanto riguarda la convergenza assoluta osserviamo che per $x > 1$ risulta

$$\left| \frac{\sin(\pi x) \ln x}{x^p} \right| \leq \frac{\ln x}{x^p}$$

e sappiamo (per verifica diretta) che quest'ultima funzione ha integrale convergente in un intorno di $+\infty$ se e solo se $p > 1$. Dunque per $p > 1$ abbiamo convergenza assoluta in un intorno di $+\infty$. (e quindi anche semplicemente). Per la convergenza semplice, in analogia con il criterio di Dirichlet per le serie, possiamo provare ad integrare per parti: (se $p > 0$)

$$\int_a^{+\infty} \sin(\pi x) \frac{\ln x}{x^p}\, dx = \left[-\cos(\pi x) \frac{\ln x}{x^p} \right]_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} (-\cos(\pi x)) \frac{1 - p \ln x}{x^{p+1}}\, dx$$

Ora osserviamo che se $p > 0$ si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-\cos(\pi x) \ln x}{x^p} = 0$$

mentre per l'integrale osserviamo che si ha ora convergenza assoluta in quanto

$$\left| -\cos(\pi x) \frac{1 - p \ln x}{x^{p+1}} \right| \leq \frac{p \ln x - 1}{x^{p+1}} \leq p \frac{\ln x}{x^{p+1}}$$

che notoriamente in un intorno di $+\infty$ ha integrale convergente se $p+1>1$ cioè se $p>0$.

Dunque tornando all'integrale sull'intero intervallo $(0,+\infty)$ abbiamo mostrato che per $p>0$ si ha convergenza semplice e per $1<p<2$ si ha convergenza assoluta.

Per dimostrare che per $0<p\le 1$ non si ha convergenza assoluta basta verificare che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^n \frac{|\sin(\pi x)|\ln x}{x^p}\,dx=+\infty.$$

Ma osserviamo che

$$\int_1^n \frac{|\sin\pi x|\ln x}{x^p}\,dx=\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{|\sin\pi x|\ln x}{x^p}\,dx$$

e, d'altra parte,

$$\int_k^{k+1}\frac{|\sin\pi x|\ln x}{x^p}\,dx\ge\int_k^{k+1}\frac{|\sin\pi x|\ln(k)}{(k+1)^p}\,dx=\frac{\ln k}{(k+1)^p}\int_0^1\sin(\pi x)\,dx$$

e noi sappiamo che la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\ln k}{(k+1)^p}=+\infty$$

diverge se $0<p\le 1$. Dunque anche il nostro integrale è assolutamente divergente se $0<p\le 1$.

Se $p\le 0$ osserviamo che la funzione integranda non è infinitesima per $x\to+\infty$. Questo è un indizio, ma non una prova, che l'integrale in tal caso non sia convergente. Per dimostrarlo procediamo in maniera simile a quanto fatto in precedenza. Osserviamo che posto

$$F(x)=\int_1^x\frac{\sin(\pi x)\ln x}{x^p}\,dx$$

se fosse $F(x)\to\ell\in\mathbb{R}$ per $x\to+\infty$ allora si dovrebbe certamente avere

$$|F(k+1)-F(k)|\to|\ell-\ell|=0,\qquad \text{per } k\to+\infty.$$

Ma la funzione $\sin(\pi x)$ ha segno costante su $[k,k+1]$ dunque per $p\le 0$ si ha

$$\begin{aligned}|F(k+1)-F(k)|&=\int_k^{k+1}|\sin(\pi x)|\,\frac{\ln x}{x^p}\,dx\\&\ge\int_k^{k+1}|\sin(\pi x)|\,\frac{\ln(k)}{(k+1)^p}\,dx\\&=\frac{\ln k}{(k+1)^p}\int_0^1\sin(\pi x)\,dx\to+\infty.\end{aligned}$$

Ne consegue che l'integrale non può convergere, neanche semplicemente, se $p\le 0$.

□