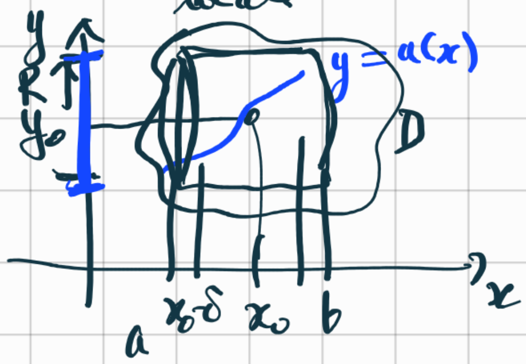
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 77 – 8.4.2022

Teorema di Cauchy-Lipschitz (esistenza e unicità locale)

$$(*) \quad \begin{cases} \underline{u}'(x) = f(x, \underline{u}(x)) \\ \underline{u}(x_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$



$a \le x_0 \le b, \quad R > 0$

$$B = \{ y \in \mathbb{R} : |y - y_0| \le R \} = [y_0 - R, y_0 + R]$$

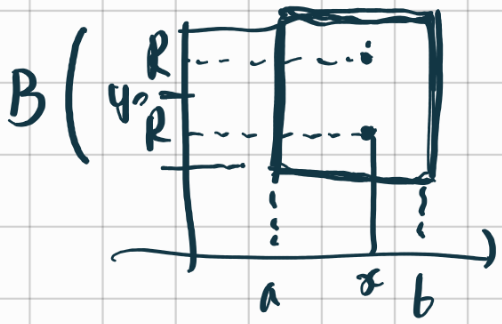
$$f : [a,b] \times B \to \mathbb{R} \qquad f = f(x,y) \qquad (y = u(x))$$

Hyp ① f è continua

② f è L-lipschitziana rispetto a y uniformemente rispetto a x:

$\exists L \in \mathbb{R} : \forall x \in [a,b] : \forall y_1, y_2 \in B : |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L \cdot |y_1 - y_2|$

[ad esempio se f è derivabile rispetto a y e $\frac{\partial f}{\partial y}$ è continua]



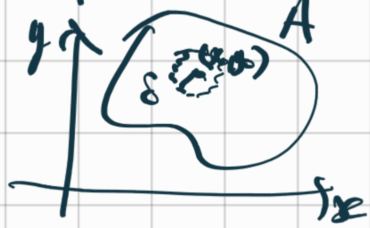
Th esiste $\delta > 0$ tale che se I è un intervallo, $I \ni x_0$

$I \subseteq [a,b] \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

$\exists!\ u : I \to B$ di classe C^1 che soddisfa $(*)$

Def $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è continua se $\forall (x_0, y_0) \in A$
f è continua in (x_0, y_0)

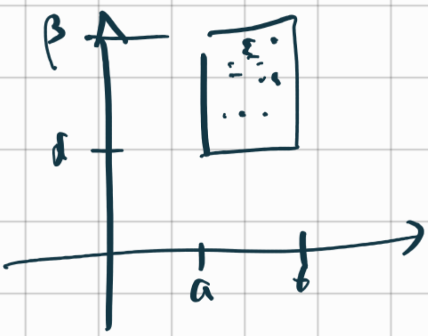
continua in (x_0,y_0) ① $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0: \; \underset{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}{\underset{\|}{d}}\big((x,y),(x_0,y_0)\big) < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$



seq. continua in (x_0,y_0) ② Se $\underbrace{(x_n,y_n) \to (x_0,y_0)}_{\begin{cases} x_n \to x_0 \\ y_n \to y_0 \end{cases}}$ allora $f(x_n,y_n) \to f(x_0,y_0)$

Teorema (Weierstraß) $f: [a,b] \times [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ continua

ha massimo e minimo.



dim $s = \sup\{f(x,y) : x \in [a,b], y \in [\alpha,\beta]\}$

$\exists \, (x_n, y_n)$ t.c. $f(x_n,y_n) \to s$ $\quad x_n \in [a,b]$

B–W $\exists \; x_{n_k} \to \bar{x} \in [a,b]$

$y_{n_{k_j}} \to \bar{y} \in [\alpha,\beta]$ $\qquad (x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) \to (\bar{x},\bar{y})$

$$\underset{s}{\underset{\downarrow}{f(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}})}} \to \underset{s}{\underset{\|}{f(\bar{x},\bar{y})}} \qquad \square$$

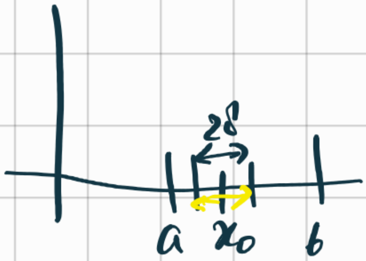
dim (C-L). $\quad f:[a,b]\times B \to \mathbb{R}$ è continua

$-M \le f(x,y) \le M$

$\exists M: \quad |f(x,y)| \le M$

Scelgo: $\delta \le \frac{R}{M}$, $\delta < \frac{1}{L}$, $\delta > 0$.

Prendo qualunque $I \ni x_0$, $I \subseteq [a,b] \cap [x_0-\delta, x_0+\delta]$.



$X = C(I, B)$

$= \{u: I \to B, \ u \text{ continua}\}$

d_∞ = distanza uniforme

Vorrei definire $T: X \to X$

(1) $\boxed{T(u) = u} \iff (*)$

(2) che sia una contrazione

$d_\infty(T(u), T(v)) \le L\, d(u,v)$

$L < 1$

$$(*) \begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) \\ u(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$u \in C^1$ e risolve $(*)$

$\Downarrow \quad \Uparrow ?$

$u \in C^0$ e u risolve $(**)$

$u'(t) = f(t, u(t))$

$$\int_{x_0}^{x} u'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\,dt$$

$$u(x) - u(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\,dt \quad \text{se } u \in C^1$$

$u(x_0) = y_0$

$$\boxed{u(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\,dt} \quad (**)$$

Se $u \in C^0$ e risolve (✱✱)

$\boxed{t \mapsto f(t, u(t))}$ è continua perché f

$$t_n \to \bar{t} \Rightarrow (t_n, u(t_n)) \to (\bar{t}, u(\bar{t}))$$

$$f(t_n, u(t_n)) \to f(\bar{t}, u(\bar{t}))$$

$x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\,dt$ è C^1

$\Rightarrow$ $u(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\,dt$ è C^1.

$$\left.\begin{aligned} u'(x) &= f(x, u(x)) \\ u(x_0) &= y_0 + 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (✱)$$

(✱✱) si scrive nella forma: $\boxed{u = T(u)}$

$$\underbrace{T(u)(x)} = \boxed{y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\,dt}$$

Devo verificare che $T : X \to X$ sia ben definito.

$u \in X = \underbrace{C(I, B)}$ $\quad (t, u(t)) \in I \times B \subseteq [a,b] \times B$

$t \in I \Rightarrow u(t) \in B$ $\quad f(t, u(t))$ è definita

$T(u) \in C(I, \mathbb{R})$ sicuramente

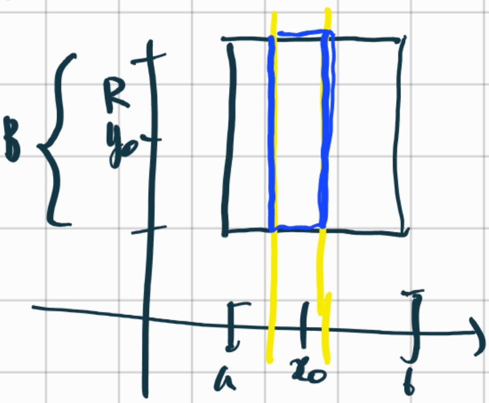
$$T(u) \overset{?}{\in} C(I, B) = X$$

$$\left|\underbrace{T(u)(x) - y_0}\right| \overset{?}{\leq} R$$

$\forall x \in I$

$\Downarrow$

$|x - x_0| \leq \delta$



$$\left|T(u(x)) - y_0\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t,u(t))\,dt\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} \left|f(t,u(t))\right| dt\right|$$

$$\leq \left|\int_{x_0}^{x} M\,dt\right| = |x-x_0|\cdot M \leq \delta\cdot M \overset{?}{\leq} R$$

$$\Uparrow$$

$$\delta \leq \frac{R}{M}$$

$$T: X \to X$$

T è una contrazione? $d_\infty(T(u),T(v)) \overset{?}{\leq} L'\cdot d_\infty(u,v)$ con $L'<1$.

$$d_\infty(T(u),T(v)) = \sup_{x\in I} \left|T(u)(x) - T(v)(x)\right|$$

$$\left|T(u)(x) - T(v)(x)\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t,u(t))\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t,v(t))\,dt\right|$$

$$\leq \left|\int_{x_0}^{x} \left|f(t,u(t)) - f(t,v(t))\right| dt\right|$$

$$\leq \left|\int_{x_0}^{x} L\cdot|u(t)-v(t)|\,dt\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} L\cdot d_\infty(u,v)\,dt\right|$$

$$= L\cdot d_\infty(u,v)\cdot|x-x_0| \leq \boxed{L\cdot\delta\cdot d_\infty(u,v)}$$

$$d_\infty(T(u),T(v)) \leq \underbrace{L\cdot\delta}_{L'}\cdot d_\infty(u,v)$$

se $\underbrace{\delta < \frac{1}{L}}_{d_\infty(T(u),T(v)) \leq L\cdot\delta\, d_\infty(u,v)}$ $L' = L\cdot\delta < 1$.

$T: X \to X$ è una contrazione

X con d_∞ è completo

Banach-Caccioppoli: $\exists!\ u \in X : T(u) = u$.

$$\Updownarrow$$

$$(**) \iff (*)$$

$\square$

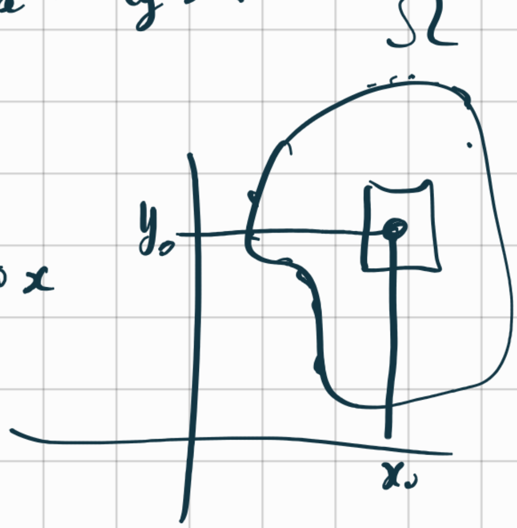
Oss 1 Se $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (aperto) è di classe C^1

allora f soddisfa le ipotesi del teorema.

Es $u'(x) = \sin(u(x)) + x^2 - \operatorname{tg} x.$

$= f(x, u(x))$

$f(x,y) = \sin(y) + x^2 - \operatorname{tg} x$



Cosa vuol dire C^1?

$f = f(x,y)$ f è continua.

$\frac{\partial f}{\partial x}$ esiste ed è continua

$\frac{\partial f}{\partial y}$ esiste ed è continua

$$\left| f(x,y_1) - f(x,y_2) \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(c) \right| \cdot \left| y_1 - y_2 \right|$$

Se $\frac{\partial f}{\partial y}$ è continua ha massimo su un rettangolino

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq L$$