ELEMENTI di CALCOLO delle VARIAZIONI
LEZIONE 11 - 3.4.2023

AC

Def u è <u>assolutamente continua</u> $\quad u: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c.

se $[\alpha_k, \beta_k]$ intervalli disgiunti $\quad \sum_{k=1}^{N} (\beta_k - \alpha_k) < \delta$

Allora $\quad \sum_{k=1}^{N} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| < \varepsilon.$

basta prendere $N=1$

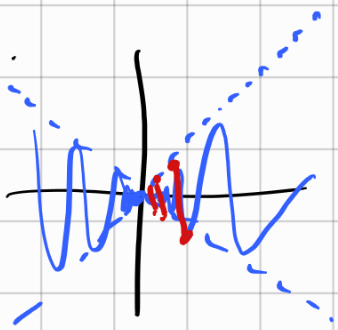
$$\text{Lip} \subseteq AC \subseteq UC$$

$\varepsilon = L \cdot \delta$ $\qquad$ uniformemente continua

Es $\quad u(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \qquad u \in UC \setminus AC.$

u è uniformemente continua

u non è assolutamente continua.



$\alpha_k \leq \beta_k$

$\alpha_k = \dfrac{1}{2k\pi + \pi} \qquad u(\alpha_k) = 0$

$\beta_k = \dfrac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} \qquad u(\beta_k) = \beta_k \cdot 1$

$I_k = [\alpha_k, \beta_k]$

$$\sum |I_k| = \sum (\beta_k - \alpha_k) = \sum \left(\frac{1}{(2k\pi + \frac{\pi}{2})} - \frac{1}{2k\pi + \pi} \right)$$

$$= \sum_{k=M}^{N} \frac{\frac{\pi}{2}}{4k^2\pi^2 + o(k^2)} \qquad \sum \frac{1}{k^2} < +\infty$$

posso renderlo piccolo a piacere prendendo M abbastanza grande.

Invece:

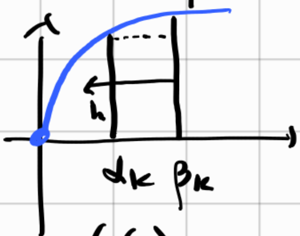
$$\sum \left| u(\beta_k) - u(\alpha_k) \right| = \sum \beta_k = \sum \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} \quad , \quad \sum \frac{1}{k} = +\infty$$

u non può essere AC.

Heine-Cantor

ES 2 $\quad u(x) = \sqrt{x}$ è UC ma non lip.

u è anche AC!



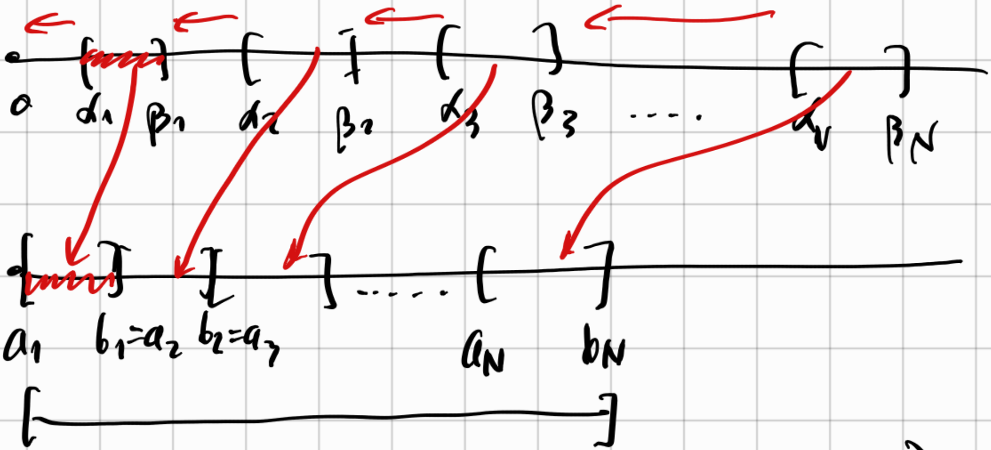
Infatti osserviamo che:

$$u(\beta_k - h) - u(\alpha_k - h) \geq \underbrace{u(\beta_k) - u(\alpha_k)}\,. \qquad \text{se } h > 0$$

$0 < h < \alpha_k < \beta_k$

basta fare la derivata rispetto ad h.

Sposto tutti gli intervalli a sinistra



$$\sum \left| u(\beta_k) - u(\alpha_k) \right| \leq \sum \left(u(b_k) - u(a_k) \right)$$

$$= u(b_N) - u(0) < \varepsilon.$$

se u è uniformemente continua: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$

$$\sum (\beta_k - \alpha_k) = \sum (b_k - a_k) = b_N - 0 < \delta$$

$\square$

Torniamo alla derivata debole.

Teorema Se $u \in L^1$ sono equivalenti:

(i) $\exists\, v \in L^1$ t.c. $\int_a^b u \cdot \varphi' = -\int_a^b v \cdot \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty((a,b))$

(ii) $\exists\, v \in L^1$ t.c. $u(y) - u(x) = \int_x^y v(t)\, dt$

per q.o. $\underbrace{x \text{ e } y}$ in $[a,b]$.

dim (ii) è equivalente a:

(ii)' $\exists\, v \in L^1\ \exists\, c \in \mathbb{R}$: $\quad u(x) = c + \int_a^x v(t)\, dt$.

(i) $\Rightarrow$ (ii)' $\quad$ v è la funzione che soddisfa (i)

Per dimostrare che $\quad u(x) - \int_a^x v(t)\, dt$ è costante basta mostrare che (lemma fondamentale II)

$$= \int_a^b \left(u(x) - \int_a^x v(t)\, dt \right) \cdot \varphi'(x)\, dx \overset{?}{=} 0$$

$$= \int_a^b u \cdot \varphi'\, dx - \int_a^b \int_a^x v(t) \cdot \varphi'(x)\, dt\, dx \qquad x, t \in [a,b],\ t \le x$$

$$= -\int_a^b v \cdot \varphi\, dx - \int_a^b \int_t^b v(t) \varphi'(x)\, dx\, dt$$

$$= -\int_a^b v \cdot \varphi - \int_a^b v(t) \cdot [\varphi]_t^b\, dt$$

$$= \cancel{-\int_a^b v \cdot \varphi} - \int_a^b v(t)\, \underbrace{\cancel{\varphi(b)}}_{=0} + \cancel{\int_a^b v(t) \varphi(t)\, dt}$$

$= 0 \qquad$ ok

$(ii)' \Rightarrow (i)$ $\qquad u(x) = c + \int_a^x v(t)\,dt$

$$\int u\cdot\varphi' \overset{?}{=} -\int v\cdot\varphi$$

$$\int_a^b u(x)\cdot\varphi'(x)\,dx = \int_a^b \left(c+\int_a^x v(t)\,dt\right)\varphi'(x)\,dx$$

$$= c\int_a^b \cancel{\varphi'(x)}\,dx + \int_a^b\int_a^x v(t)\,\varphi'(x)\,dt\,dx$$

$$= \int_a^b\int_t^b v(t)\varphi'(x)\,dx\,dt = \int_a^b v(t)\int_t^b \varphi'(x)\,dx\,dt$$

$$= \int_a^b v(t)\left(\varphi(b)-\varphi(t)\right)dt = \int_a^b v(t)\cdot\cancel{\varphi(b)} - \int_a^b v\cdot\varphi$$

$\square$

EQUI-INTEGRABILITA'

<u>Idea</u> se $\Gamma \subseteq L^1([a,b])$ quali condizioni su Γ mi garantiscono compattezza?

E banach $\qquad E'$ | $\xi_k \xrightarrow{*} \xi$

u $\qquad$ | $\xi_k(u) \to \xi(u)$.

<u>Def</u> $\Gamma \subseteq L^1(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ si dice essere equi-integrabile

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \text{se } A\subseteq I,\ |A|<\delta \Rightarrow \forall u\in\Gamma: \int_A |u| < \varepsilon$$

<u>Osservazione 1</u> Se Γ è limitato in L^1 cioè

$\exists R$: $\forall u\in\Gamma$ $\int|u| \le R$ non è detto che Γ sia equi-integrabile.

es: $u_\varepsilon =$ 

$$\int |u_\varepsilon| = R.$$

Si potrebbe osservare: che se Γ è limitato in L^p con $p>1$ allora Γ è equi-integrabile.

se $\exists R: \left(\|u\|_{L^p} < R, \forall u \in \Gamma \right)$

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$

$$\int_A |u| = \int \chi_A \cdot |u| = \|\chi_A \cdot u\|_{L^1} \overset{\text{Hölder}}{\leq} \|u\|_{L^p} \cdot \|\chi_A\|_{L^q}$$

$$\leq R \cdot \left(\int_A 1^q \right)^{\frac{1}{q}} = R \cdot |A|^{\frac{1}{q}} \to 0$$

se $|A| \to 0$

Lemma [caratterizzazione della equi-integrabilità]

Sia $\Gamma \subseteq L^1([a,b])$. Sono equivalenti:

(i) Γ è equi-integrabile

(ii) $\displaystyle \lim_{M\to+\infty} \sup_{u\in\Gamma} \int_{a \atop \{|u|\geq M\}}^{b} |u| = 0$

(iii) $\exists\, \varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ convessa, super lineare: $\displaystyle \lim_{t\to+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = +\infty$

tale che $\displaystyle \int_a^b \varphi(|u|) \leq 1 \quad \forall u \in \Gamma.$

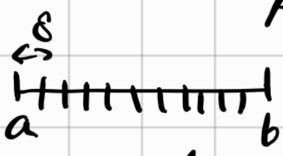
---

dim (i) $\Rightarrow$ (ii) Ipotesi: Γ è equi-integrabile

- osservazione Γ è limitato in L^1.

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : |A|\leq\delta \Rightarrow \int_A |u| \leq \varepsilon$

Dato $\varepsilon = 1$ $\exists \delta > 0$. $|A| \leq \delta \Rightarrow \int_A |u| \leq 1$



$$\int_a^b |u| \leq \sum_{k=1}^{N} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |u| \leq N \quad \leftarrow \text{ indipendente da } u \in \Gamma.$$

$$N = \left\lceil \frac{b-a}{\varepsilon} \right\rceil$$

Dunque $C = \sup_{u \in \Gamma} \int_a^b |u| < +\infty$.

$$C \geq \int_a^b |u| = \int_{\{|u| \geq M\}} |u| + \int_{\{|u| \leq M\}} |u| =$$

$$\geq \int_{\{|u| \geq M\}} |u| \geq M \cdot |\{|u| \geq M\}|$$

$$|\{|u| \geq M\}| \leq \frac{C}{M}$$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tc. $|A| < \delta \Rightarrow \int_A |u| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists M$ tc. $\frac{C}{M} < \delta$

$$\int_{\{|u| \geq M\}} |u| \leq \varepsilon \Rightarrow \sup_{u \in \Gamma} \int_{\{|u| \geq M\}} |u| \leq \varepsilon$$

dunque: $\lim_{M \to +\infty} \sup_{u \in \Gamma} \int_{\{|u| \geq M\}} |u| = 0$ ok

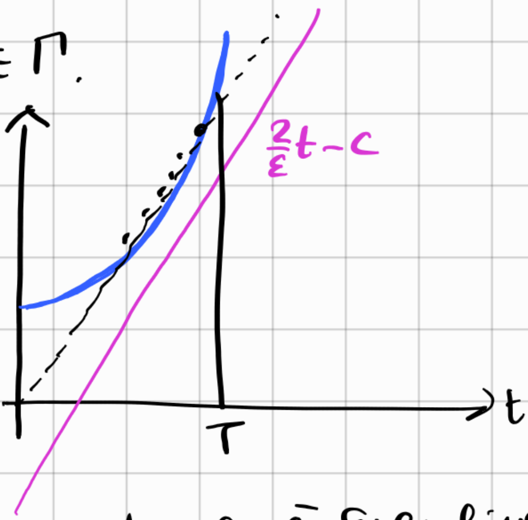
(iii) $\Rightarrow$ (i) Ipotesi: $\exists \varphi$ convessa, super lineare tale che

$$\int \varphi(|u|) \le 1 \qquad \forall u \in \Gamma.$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists C$ t.c.

$$\varphi(t) \ge \frac{2}{\varepsilon} t - C$$

CLAIM



perché φ è super-lineare.

Questo si può fare perché

$$\varphi(t) - \frac{2}{\varepsilon} t \to +\infty \quad \text{per } t \to +\infty$$

quindi esiste $[0, T]$ t.c. $\forall t \ge T \ \varphi(t) > \frac{2}{\varepsilon} t$.

Prendo $C = \left(\max \frac{2}{\varepsilon} t - \varphi(t)\right)^+ < +\infty$ (per Weierstraß)

$$\frac{2}{\varepsilon} t - C \le \varphi(t)$$

$\forall t \in [0, T]$ ma anche per $t > T$.

$A \subseteq [a,b]$ $\underline{\text{ok}}$ CLAIM.

$$t \le \left(\varphi(t) + C\right) \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\int_A |u| \le \frac{\varepsilon}{2} \int_A \left[\varphi(|u|) + C\right] = \frac{\varepsilon}{2} \int_A \varphi(|u|) + C \frac{\varepsilon}{2} |A|$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} \boxed{\int_a^b \varphi(|u|)}^{\le 1} + C \frac{\varepsilon}{2} |A| \le \frac{\varepsilon}{2} + \cancel{C} \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\cancel{C}} = \varepsilon$$

scegliamo $\delta = \frac{1}{C}$ così se $|A| \le \delta$

$\underline{\text{ok}}$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) prossima volta.