ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 12 - 17.10.2022

Su un gruppo additivo $\mathbb{R}$ totalmente ordinato denso e continuo fissato $1>0$ si può definire la moltiplicazione che rende $\mathbb{R}$ un campo totalmente ordinato e continuo.

<u>def</u> (campo) $(R, +, \cdot, 0, 1)$ è un <u>campo</u> se
- $(R, +, 0)$ è un gruppo abeliano con neutro 0
- $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ è un gruppo abeliano con neutro 1
- proprietà distributiva: $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$.
- $1 \neq 0$

Se su R c'è un ordinamento $\leq$ si dice che il campo è un <u>campo ordinato</u> se
- $x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$ (gruppo additivo ordinato)
- $z > 0 \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$

<u>Oss</u> In un campo c'è sempre il punto medio $x < \frac{x+y}{2} < y$; un campo totalmente ordinato è denso.

$\mathbb{R}$ è un gruppo tot. ordinato, denso, continuo con $1>0$ è anche un campo totalmente ordinato, continuo.

<u>Teo</u> $\mathbb{R}$ esiste. (si può costruire)

<u>cenno dim</u> dato $\mathbb{N}$, si costruiscono $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{R} = \{ A \subseteq \mathbb{Q} : A \neq \emptyset, \exists\, b \in \mathbb{Q} : b \geq A \}$$

$\mathbb{R} = \mathcal{R}/_{\sim}$ $\qquad A \sim A'$ se $\{b\in\mathbb{Q} : b \geq A\} = \{b\in\mathbb{Q} : b \geq A'\}$

Es $\quad A = \{x\in\mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ $\qquad [A]_\sim = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

$A' = \{1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414, \ldots\}$

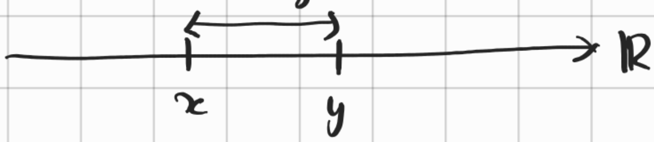
$A' \sim A$ $\qquad [A']_\sim = [A] = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$. $\square$

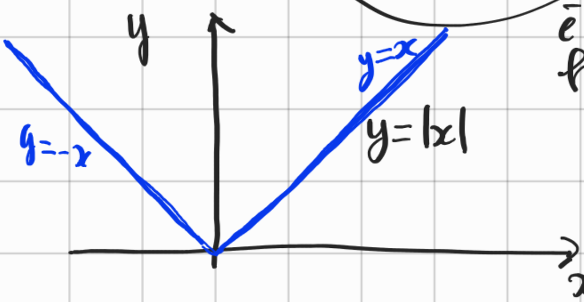
Valore assoluto

Dato $x\in\mathbb{R}$ $\qquad |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x| \end{aligned}$ è una funzione

$|x-y| \overset{|y-x|}{=}$ è la "distanza".





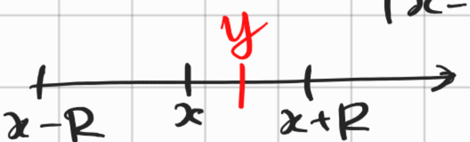
Proprietà

1. $|x| \geq 0$
2. $||x|| = |x|$
3. $|-x| = |x|$
4. $|x\cdot y| = |x|\cdot|y|$ $\qquad -(x\cdot y) = (-x)\cdot y$
5. $|x+y| \leq |x| + |y|$ (convessità)
6. $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$ (triangolare)
7. $|x-y| \geq ||x|-|y||$ (triangolare inversa)

Proprietà che si usa spesso:

$|x-y| \leq R \iff x-R \leq y \leq x+R$

$\iff y-R \leq x \leq y+R$



Se $y=0$

$|x|<R$

$\Updownarrow$

$-R<x<R$

Se $\boxed{y \geq x}$ $\quad |x-y| = y-x \overset{!}{<} R$

$\Updownarrow$

$y<x+R$

$y \leq x \quad |x-y| = x-y < R$

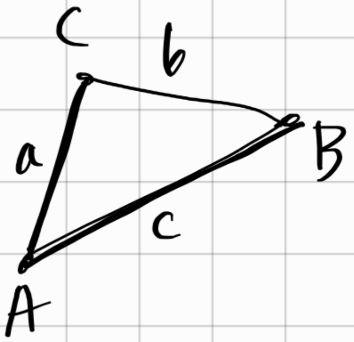
$\Updownarrow$

$y > x-R$

dim 5.

$$-|x| \leq x \leq |x|$$
$$-|y| \leq y \leq |y|$$
$$-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$$
$$|x+y| \leq |x|+|y|.$$

6



$$c \leq a+b$$
$$x-z = (x-y)+(y-z)$$
$$|x-z| \leq |x-y|+|y-z| \qquad \square$$

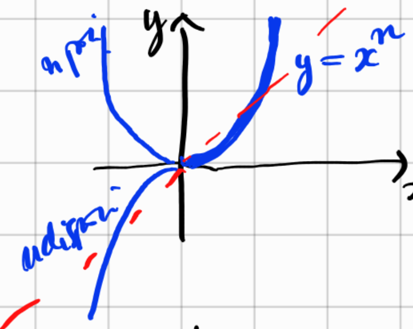
Errore $\quad |-x| \neq x \quad$ NO $\quad x=-1$

$$|-(-1)| = |1| = 1$$

RADICI n-ESIME

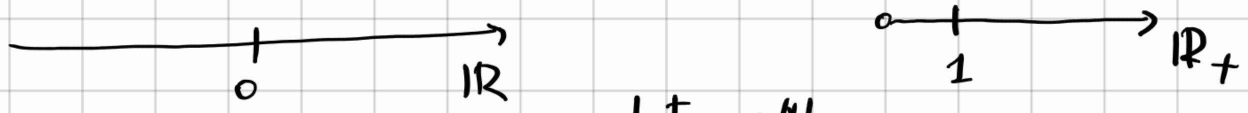
Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ $\quad \forall y>0 \ \exists!\, x>0 : x^n = y.$

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n\text{-volte}}$$



$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x>0\}$

$(\mathbb{R}_+, 1, \cdot, \leq)$ è un gruppo moltiplicativo totalmente ordinato denso continuo.



dati $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$.

Teo (divisibilità): Dati $y \in \mathbb{R}_+ \ \exists!\ x \in \mathbb{R}_+ : x^n = y$.

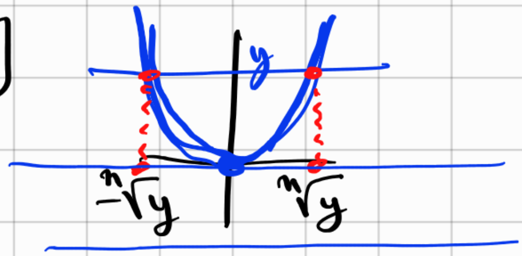
Se $x^n = y$, $x \geq 0$, scriviamo $x = \sqrt[n]{y}$.

$0^n = 0 \qquad\qquad 0 \doteq \sqrt[n]{0}$

Se n pari $\sqrt[n]{y}$ è definita solo per $x \geq 0$ (ed è l'unico $x \geq 0$ t.c. $x^n = y$.)

Ma $(-x)^n = x^n$

$[(-x)\cdot(-x) = -(-(x \cdot x)) = x \cdot x]$

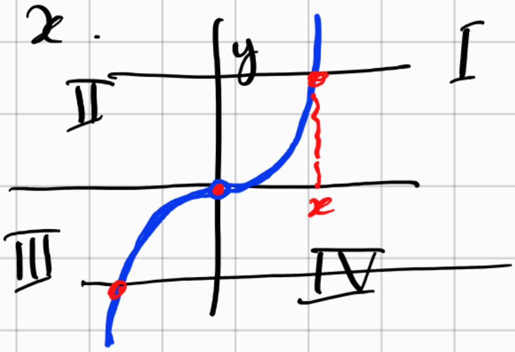


L'equazione $x^n = y$

- Se $y > 0$ ha due soluzioni: $x_1 = -\sqrt[n]{y}$, $x_2 = \sqrt[n]{y}$
- Se $y = 0$ ha una soluzione: $x = 0$.
- Se $y < 0$ non ha soluzioni.

Se n dispari l'equazione $x^n = y$ ha una unica soluzione x.

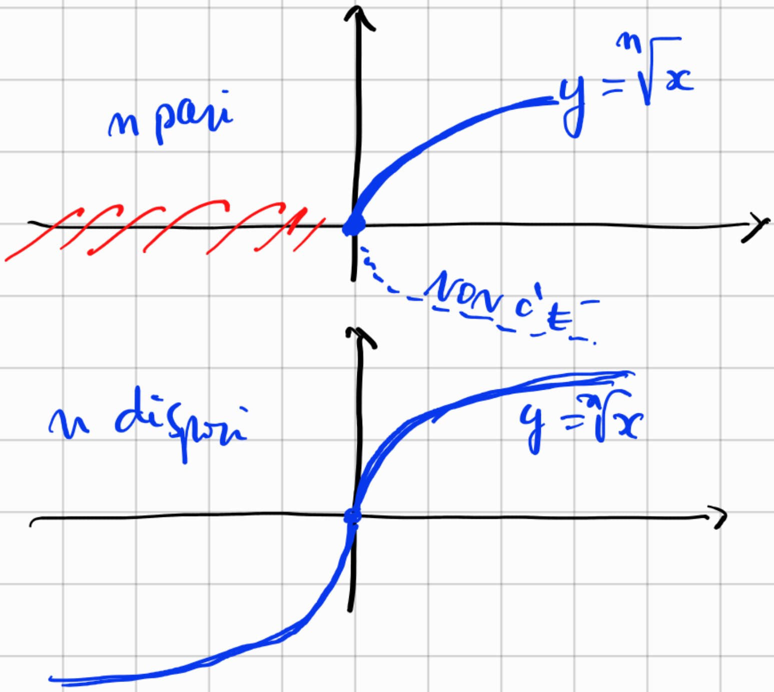
$\sqrt[n]{y} = x$.

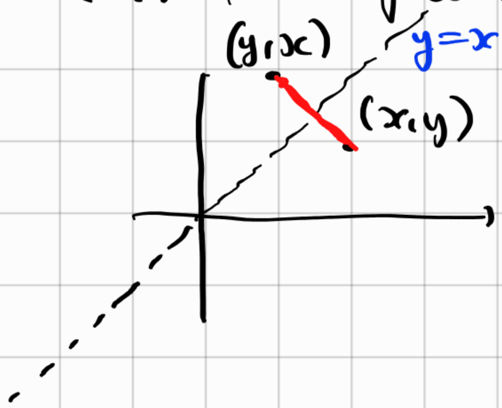


$\forall x : \quad (-x)^n = -(x^n)$

Se $x < 0 \quad x^n < 0$.

$f(x)=x^n$ $\qquad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è bigettiva (se n dispari)





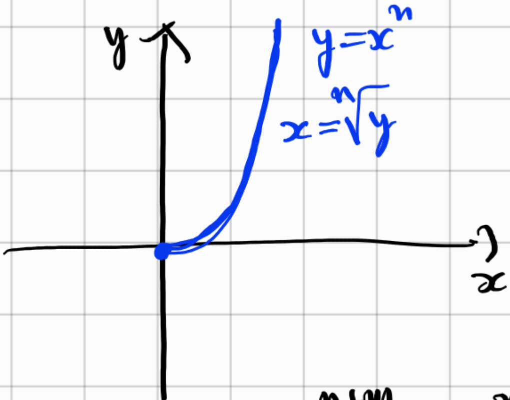
Se n dispari: $\sqrt[n]{x}$ è la funzione inversa di x^n

$\forall x\in\mathbb{R}$ $\qquad \sqrt[n]{x^n}=x \qquad (\sqrt[n]{x})^n=x$

Se n pari: $\sqrt[n]{x}$ è l'inversa di x^n solo su $x\geq 0$

$$\sqrt[n]{x^n}=|x| \quad ⚠ \qquad\qquad (\sqrt[n]{x})^n = x = |x|.$$

$x\geq 0$



Proprietà

$$\begin{cases} x^{n+m}=x^n\cdot x^m \\ (x^n)^m = x^{n\cdot m} \\ (x\cdot y)^n = x^n y^n \end{cases}$$

$(n+m)\cdot x = nx+mx$

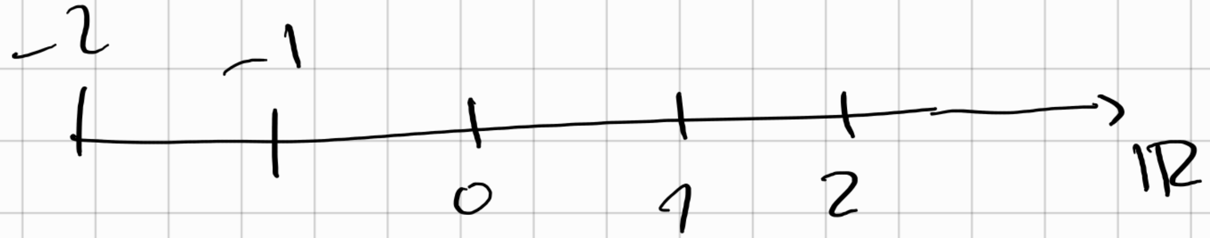
$\left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n}.$

- $\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$ $\quad$ ($x>0$, $y>0$ se n pari)
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \cdot m]{x}$
- $\sqrt[n]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$

Monotonia: se n pari

$$x > y \geq 0 \iff x^n > y^n \iff \sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y}$$

$\mathbb{R}$



$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ $\qquad$ $n \in \mathbb{N}$ si identifica con $n \cdot 1_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-\mathbb{N}\}$

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

$\mathbb{Q} = \frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}$

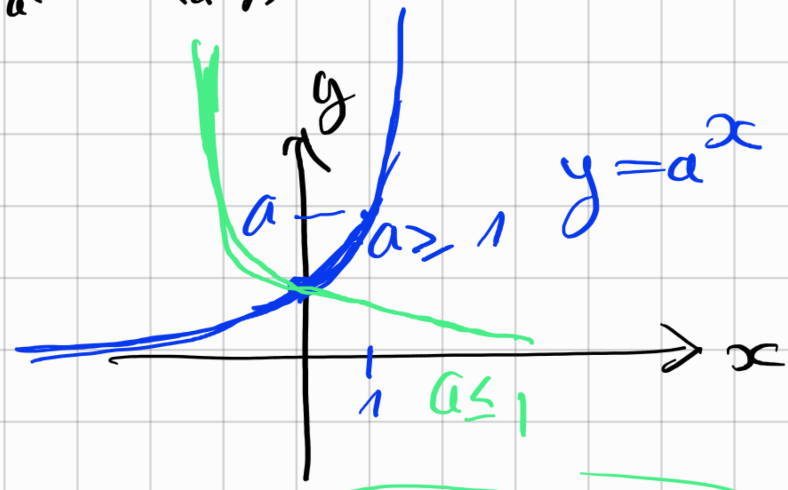
POTENZE

$(\mathbb{R}, 0, +)$ e $(\mathbb{R}_+, 1, \cdot)$ sono gruppi tot. ordinati densi e continui.

Fissato $a > 1$ esiste unico $\varphi_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$

$$\begin{cases} \text{(i)} & \varphi_a(1) = a \\ \text{(ii)} & \varphi_a(x+y) = \varphi_a(x)\cdot\varphi_a(y) \\ \text{(iii)} & x \le y \Rightarrow \varphi_a(x) \le \varphi_a(y). \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^x = \varphi_a(x) \\ a^0 = 1 \\ a^1 = a \\ a^{x+y} = a^x \cdot a^y \\ x \le y \Rightarrow a^x \le a^y \end{cases}$$



$$\boxed{(a\cdot b)^x = \boxed{a^x \cdot b^x}}$$

$$\boxed{a^{x\cdot y} = (a^x)^y}$$

Se $a = 1$ $\quad a^x = 1.$

Se $0 < a < 1$ $\quad x \le y \Rightarrow a^x \ge a^y$