ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 35 - 21.12.2022

Teorema fondamentale dell'algebra

Teo $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso
cioè se $P(z)$ è un polinomio a coefficienti complessi $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ $\quad a_k \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$

Se $n \geq 1$ (P non costante) $\quad n = \deg P$
allora $\exists\, z_1 \in \mathbb{C}$ t.c. $P(z_1) = 0$.
(in realtà $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$) $\quad \left[\begin{array}{l} P(z) = c \\ P(z) - c = 0 \end{array}\right]$

$$\boxed{\mathbb{C}_z} \xrightarrow{P} \boxed{\mathbb{C}_{P(z)}}$$

Non solo. Se $P(z_1) = 0$

$$P(z) = Q_1(z) \cdot (z - z_1) + R(z) \qquad \deg R(z) < 1$$

$$0 = P(z_1) = Q_1(z) \cdot 0 + \underset{0}{\overset{\shortparallel}{c}} \qquad R(z) = c$$

Ruffini $\quad P(z) = Q_1(z) \cdot (z - z_1) \qquad \deg P = n \Rightarrow \deg Q = n-1$

$$\exists z_2 : \; Q_1(z_2) = 0 \qquad Q_1(z) = Q_2(z)(z - z_2)$$

.... iterando ...

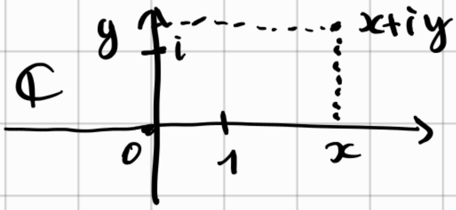
$$P(z) = c\,(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

Oss $\mathbb{R}$ non è algebricamente chiuso $\quad P(x) = x^2 + 1$

ma $z^2+1 = (z-i)(z+i)$ $\qquad i^2=-1$

$(-i)^2 = -1.$

Ripesso



$z+w \qquad f(z) = z+w$

$z\cdot w$

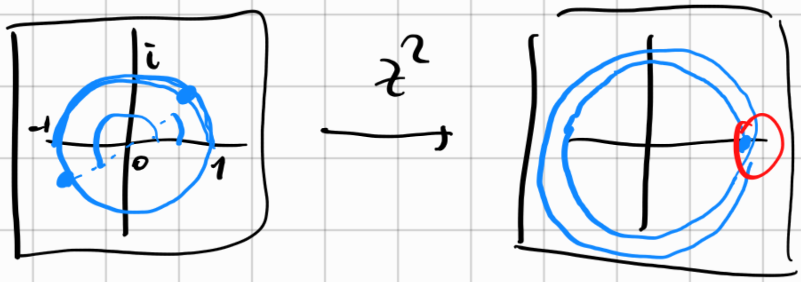
$$z=\rho\cdot(\cos\theta+i\sin\theta) = \rho\cdot\left(e^{i\theta}\right) = e^{\ln|z|+i\theta}$$

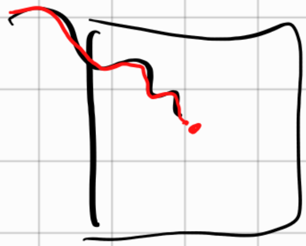
$\rho=|z|$

$\theta=\mathrm{Arg}\, z$

↑ se $z\neq 0$

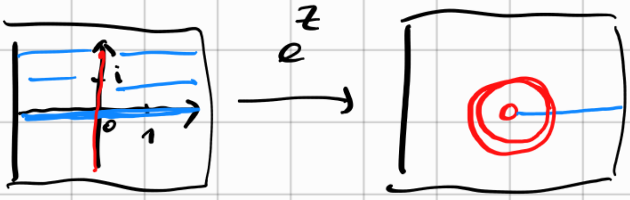
z^2 $\qquad$ se $z=\rho\cdot e^{i\theta}$ $\qquad z^2=\rho^2\cdot e^{i2\theta}$



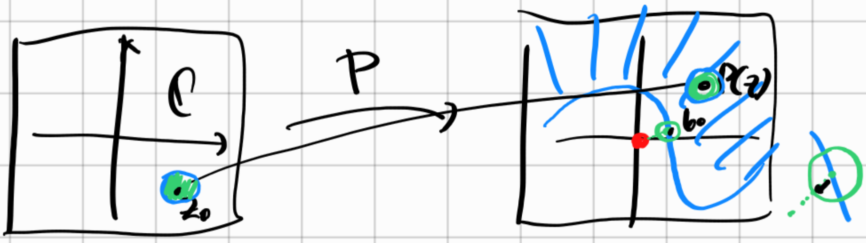


z^n

Es



dim (teo fondamentale dell'algebra)



(1) Applicare Weierstraß. Supponiamo per assurdo che $P(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = |P(z)|$$

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$$

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

$a_n \neq 0$

$$f(z) = |a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n|$$

$\lim_{z \to \infty} f(z) = ?$

$$= \left| z^n \cdot \left(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n \right) \right|$$

$$= |z|^n \cdot \left| \frac{a_0}{z^n} + \dots + a_n \right| \quad \text{per } z \to \infty$$

$(|z| \to +\infty)$

$z \to 0 \quad |z| \to 0$

$$\to +\infty$$

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ è coerciva $\left(\lim_{z \to \infty} f(z) = +\infty \right)$.

f è continua

Weierstraß (generalizzato) $\Rightarrow$ f ha minimo.

Sia z_0 tale minimo.
Vogliamo mostrare che $P(z_0) = 0$ (cioè $f(z_0) = 0$).
Per assurdo supponiamo $|P(z_0)| > 0$.

$$P(z) = \sum a_k \cdot z^k = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot (z - z_0)^k = Q(\underset{w}{z - z_0})$$

$z = z_0 + w$

$b_n \neq 0$

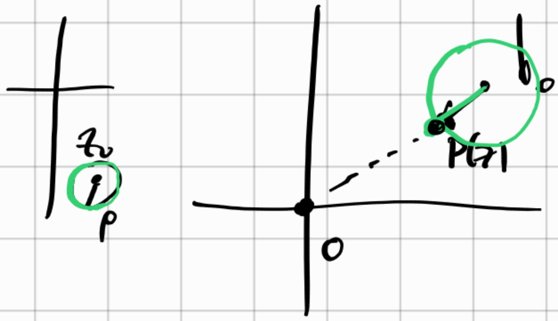
$$P(z) = b_0 + b_1 (z - z_0) + b_2 (z - z_0)^2 + \dots + b_n (z - z_0)^n$$

$b_0 = P(z_0) \neq 0$ (per assurdo)

Sia k il minimo indice >0 t.c. $b_k \neq 0$.

$$P(z) = b_0 + \underbrace{b_k(z-z_0)^k} + b_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + \dots + b_n(z-z_0)^n$$

$$= b_0 + b_k(z-z_0)^k \cdot \left[1 + \underbrace{\frac{b_{k+1}}{b_k}(z-z_0)^1 + \dots + \frac{b_n}{b_k}(z-z_0)^{n-k}}_{\to 0 \;\; z \to z_0 .} \right]$$



Scelgo $z = z_0 + \rho e^{i\theta}$

È possibile trovare θ t.c.

$$\left| b_0 + b_k \underbrace{(z-z_0)^k} \right| = |b_0| - \underbrace{|b_k| \cdot \rho^k}$$

Se ρ è abbastanza piccolo:

$$\left| \frac{b_{k+1}}{b_k}(z-z_0)^1 + \dots + \frac{b_n}{b_k}(z-z_0)^{n-k} \right|$$

$$\le \left| \frac{b_{k+1}}{b_k} \right| \cdot \rho + \dots + \left| \frac{b_n}{b_k} \right| \rho^{n-k} \ll 1.$$

$$< \frac{1}{2}$$

... e questo basta per dire

che $|P(z)| < |P(z_0)| = |b_0|$ assurdo perché z_0 era il punto di minimo per $|P(z)|$ □

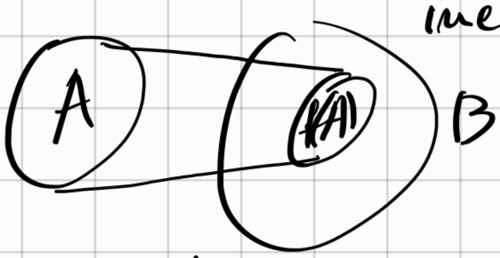
CARDINALITÀ INFINITE

Ricordo A, B insiemi

diremo che $\#A = \#B$ se $\exists\, f: A \to B$ biyettiva.
(hanno la stessa cardinalità).

$\#A \leq \#B$ se $\exists\, f: A \to B$ iniettiva

$\#A < \#B$ se $\begin{cases} \#A \leq \#B \\ \text{e non } \#A = \#B \end{cases}$



$$\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z} = \#\mathbb{Q} < \#\mathbb{R} = \#\mathbb{C}$$

$\mathbb{N}$: 0 1 2 3 4 5 . . .

$\mathbb{Z}$: 0 1 −1 2 −2 3 . . . .

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \supseteq \mathbb{N}$

$$f(k) = \begin{cases} -\frac{k}{2} & \text{se } k \text{ pari} \\ \frac{k+1}{2} & \text{se } k \text{ dispari} \end{cases}$$

Paradosso dell'infinito (anzi definizione)
(o di Galileo)

A è infinito (per Dedekind) se $\exists\, f: A \to A$ iniettiva ma non suriettiva

$f: A \to f(A)$ è bijettiva
$\#A = \#f(A)$ con $f(A) \subsetneq A$.

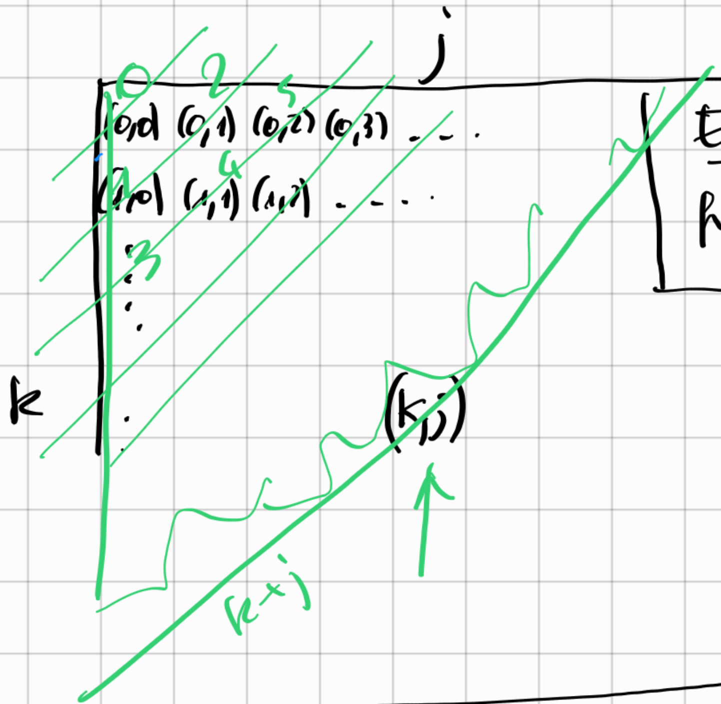
Ad esempio $\mathbb{Z}$ con la f di prima
$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$.

(Hotel Hilbert) $\mathbb{N}$ $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$n \mapsto n+1$

σ è iniettiva ma non suriettiva.

Primo metodo diagonale di Cantor

$$\# \mathbb{N} = \#(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$$



Esercizio scrivere questa funzione $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

$$\#\mathbb{N} \le \#\mathbb{Q} \le \#(\mathbb{N}\times\mathbb{Z}) = \#(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) = \#\mathbb{N}$$

$$\frac{p}{q} \sim (p,q)$$

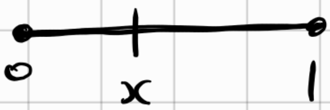
$$\#\mathbb{Q} = \#\mathbb{N} \Longleftarrow$$

Cantor-Bernstein

$$\begin{cases} \#A \le \#B \\ \#B \le \#A \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\#A = \#B$$

Secondo metodo diagonale di Cantor

$$(\#\mathbb{N} < \#[0,1] \le \#\mathbb{R})$$



Sia $f:\mathbb{N}\to[0,1]$

$f(0) = 0,1415278\ldots$

$f(1) = 0,7777200000$

$f(2) = 0,199999999999$

$\vdots$

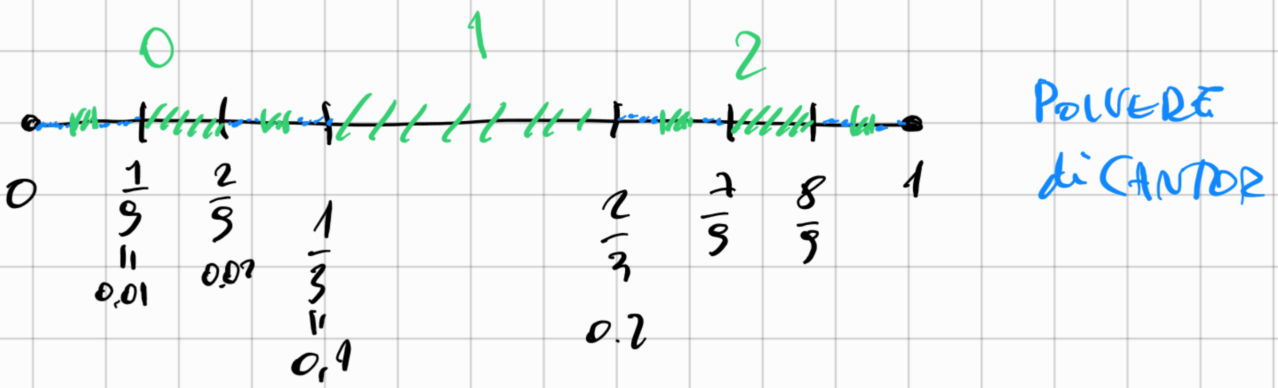
$x = 0,7222772277$

Idea: costruire un numero $x \in [0,1]$ che non è nell'elenco.

$x \neq f(k)$ perché la k-esima cifra è diversa.

Se lo faccio in base 3 $\quad 0, 1, 2$

$C = \{ x \in [0,1]$: in base 3 x si scrive senza usare la cifra 2



$$\# C = \# \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

$x \in C \qquad x = 1133113133$

<u>Teo</u> Cantor $\quad \# \mathcal{P}(A) > \# A.$ $\square$