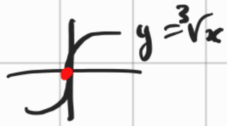
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 42 - 23.1.2023

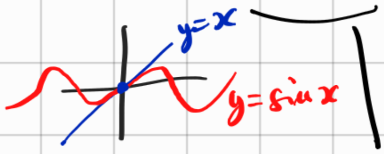


$$f(x) = \sqrt[3]{x - \sin x}$$

è continua? Sì perché è composizione di fn. continue

è derivabile?

se $x - \sin x \neq 0$ sì perché composizione di fn. derivabili.



$x \neq 0$

se $x = 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x - \sin x}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \sqrt[3]{\frac{x - \sin x}{x^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{6}}$$ [lo vediamo sotto con de L'Hospital]

f è derivabile anche in $x = 0$, $f'(0) = \frac{1}{\sqrt[3]{6}}$

f è C^1? se $x \neq 0$ f' è continua in x.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x - \sin x)^2}} & \text{per } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{6}} & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x - \sin x)^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{(1 - \cos x)^3}{(x - \sin x)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{6}}$$ [lo vediamo sotto]

Teorema (di de l'Hospital, caso $\frac{0}{0}$) (**)

Ipotesi
x_0 pto di accumulazione per I $\quad \lim_{x\to x_0} f(x)=0, \quad \lim_{x\to x_0} g(x)=0,$

$f, g : I\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$, I intervallo, f, g derivabili, $g'(x)\neq 0$ $\forall x \in I\setminus\{x_0\}$

Se il limite a destra esiste (in $[-\infty,+\infty]$) allora: $\quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to x_0} \frac{f'(y)}{g'(y)}$

dim

Possiamo supporre $\underbrace{f(x_0)=0}$, $g(x_0)=0$ (*)

Sia $x\in I$, $x > x_0$ $\quad \left.\begin{array}{l} f:[x_0,x]\to\mathbb{R} \\ g:[x_0,x]\to\mathbb{R}\end{array}\right\}$ derivabili in $(x_0,x]$ $\Downarrow$ continue su (x_0,x)

$g'(x)\neq 0$ per ipotesi

Sono continue anche in x_0 per (*) (**)

Posso applicare Cauchy:

$$\exists\, y\in(x_0,x) \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(y)}{g'(y)}$$

$$\| $$

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

per $x\to x_0^+$ $\quad y=y(x)\to x_0$

Visto che $\lim_{y\to x_0^+} \frac{f'(y)}{g'(y)}$ esiste

Allora $\quad \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to x_0^+} \frac{f'(y)}{g'(y)}$ $\quad$ ok

$y=y(x)$

Per $x < x_0$ si fa allo stesso modo.

Se $\underline{x_0 = +\infty}$ $\quad F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$, $G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$ $\quad \Big| \; F:(0,\alpha) \to \mathbb{R}$, $G:(0,\beta) \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x=\frac{1}{t}}{=} \lim_{t\to0^+} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t\to0^+} \frac{F'(t)}{G'(t)} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Hospital applicato a $\frac{F}{G}$

$$F'(t) = \left(f\left(\tfrac{1}{t}\right)\right)' = f'\left(\tfrac{1}{t}\right)\cdot\left(-\tfrac{1}{t^2}\right)$$
$$G'(t) = \left(g\left(\tfrac{1}{t}\right)\right)' = g'\left(\tfrac{1}{t}\right)\cdot\left(-\tfrac{1}{t^2}\right)$$

$$\lim_{t\to0^+} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t\to0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\cancel{\left(-\frac{1}{t^2}\right)}}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\cancel{\left(-\frac{1}{t^2}\right)}} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

esiste.

Se $x_0 = -\infty$ si fa in maniera analoga

$\square$

<u>Teorema</u> [di de l'Hospital caso $\left[\frac{*}{\infty}\right]$]
c'è sugli appunti, è molto più complicato da dimostrare.

<u>Esempio</u> $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt[3]{x-\sin x}}{x}$ $\qquad f(x) = x - \sin x \to 0$ per $x \to 0$
$\qquad g(x) = x \to 0$ per $x \to 0$

$$\lim_{x\to0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\cos x}{\sqrt[3]{(x-\sin x)^2}}}{1} = \lim_{x\to0} \frac{1}{3}\,\frac{1-\cos x}{\underbrace{\sqrt[3]{(x-\sin x)^2}}}$$

Provo ancora con $\hat{H}$ $\quad \displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1}{3}\,\frac{\sin x}{\frac{3}{2}\,\frac{1-\cos x}{\underbrace{\sqrt[3]{x-\sin x}}}}$

$$= \lim_{x \to 0} 2 \cdot \frac{\sin x \cdot \sqrt[3]{x - \sin x}}{1 - \cos x} \quad \ldots\ldots$$

Altro tentativo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x - \sin x}}{x} = \lim_{x \to 0} \sqrt[3]{\frac{x - \sin x}{x^3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[3]{6}}$$

limite notevole

$$\underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}} \overset{\text{Hôpital}}{=} \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}} \overset{\text{Hôpital}}{=} \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x}} = \frac{1}{6}$$

Esercizio 2

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{(1 - \cos x)^3}{(x - \sin x)^2}} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{9}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{6}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)^3}{(x - \sin x)^2} \overset{\hat{H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{3(1 - \cos x)^{\cancel{2}} \cdot \sin x}{2(x - \sin x)\cancel{(1 - \cos x)}}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \cos x \sin x}{x - \sin x}$$

$$\overset{\hat{H}}{=} \frac{3}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x + \sin^2 x - \cos^2 x}{1 - \cos x}$$

$$\overset{\hat{H}}{=} \frac{3}{2} \lim_{x \to 0} \frac{-\cancel{\sin x} + 2 \cancel{\sin x} \cos x + 2 \cos x \cancel{\sin x}}{\cancel{\sin x}}$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{x \to 0} (-1 + 4 \cos x) = \frac{9}{2} \quad !$$

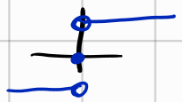
Controesempio:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x\cdot \sin\frac{1}{x} = 0$$

|| ? No! non si applica l'Hospital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2x\sin\frac{1}{x}}^{\to 0} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1}$$ non esiste.

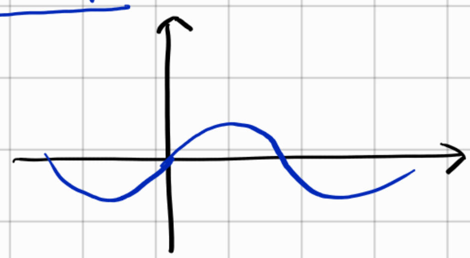
Esercizio Non esiste $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabile tale che



$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x>0 \\ 0 & \text{per } x=0 \\ -1 & \text{per } x<0 \end{cases}$$

Teorema (Darboux) la derivata di una funzione soddisfa il teorema dei valori intermedi (su ogni intervallo). | dim sugli appunti.

POLINOMIO DI TAYLOR



Def Sia f derivabile n volte in un punto x_0.

cioè: f è definita in x_0

è derivabile in x_0 e in un suo intorno

così posso fare la derivata seconda.

f' è derivabile in x_0, $f''(x)$ esiste in un intorno di x_0

⋮

$f^{(n-1)}$ è derivabile in x_0 e lì vicino e

$f^{(n)}(x_0)$ esiste.

Definiamo il polinomio di Taylor centrato in x_0, di ordine n come:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k .$$

Esempio Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 3 per $f(x) = \sin x$ centrato in $\underbrace{x_0 = 0}$

$$\begin{cases} f(x) = \sin x \\ f'(x) = \cos x \\ f''(x) = -\sin x \\ f'''(x) = -\cos x \end{cases}$$

(k=0) (k=3)

$$P(x) = \frac{0}{0!}(x-0)^0 + \frac{1}{1!}(x-0)^1 + \frac{0}{2!}(x-0)^2 + \frac{(-1)}{3!}(x-0)^3 .$$

$$= 0 + x + 0 - \frac{1}{6}x^3 = x - \frac{x^3}{6}$$

Idea: $P(x)$ approssima "bene" $\sin x$ vicino $x=0$.