ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 38 – 10.1.2024

Polinomio di Taylor

E' l'unico polinomio che ha le stesse derivate della funzione nel punto x_0

$$P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \qquad k=0,1,\dots,n$$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

<u>Oss.</u> Se P è il P. di Taylor di f centrato in x_0 di ordine n allora
P' è il P. di Taylor di f' centrato in x_0 di ordine $(n-1)$.

<u>Es</u> $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$, $n = 5$ $\qquad P(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

$\downarrow$

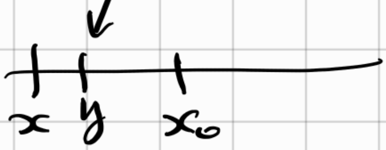
$f'(x) = \cos x$, $x_0 = 0$ $n = 4$ $\qquad P'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

<u>Teorema</u> (Formula di Taylor con resto di Lagrange).

f derivabile $n+1$ volte in un intervallo intorno a x_0

$\forall x$ $\exists y$ compreso tra x_0 e x tale che:

$$(*) \quad \boxed{f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{P(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{\text{Resto}}}$$



dim Per induzione su n.

$n=0$ (*) $$f(x) \overset{?}{=} f(x_0) + f'(y)\cdot(x-x_0)$$

$$\Uparrow$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(y)$$

$$\Uparrow$$

Lagrange.

Supponiamo il teorema vero per un certo $n-1$ e dimostriamo che allora vale anche per n

Devo dimostrare che $\exists y$ tra x_0 e x tale che

Tesi

$$(*) \iff \frac{f(x)-P(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \overset{?}{=} \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}$$

è 0

$$\frac{f(x)-P(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{[f(x)-P(x)]-[f(x_0)-P(x_0)]}{(x-x_0)^{n+1}-(x_0-x_0)^{n+1}}$$

$$\overset{\text{Cauchy}}{=} \frac{f'(y)-P'(y)}{(n+1)(y-x_0)^n}$$

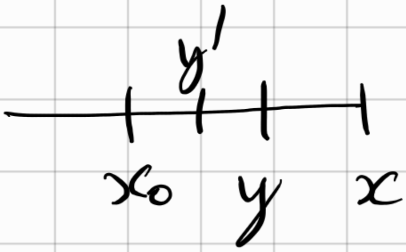
$$\overset{\text{Ipotesi induttiva}}{=} \frac{\frac{1}{n!}(f')^{(n)}(y')\cdot\cancel{(y-x_0)}^n}{(n+1)\cancel{(y-x_0)}^n}$$

Cauchy

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(y)}{g'(y)}$$

$$y \in (a,b)$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(y')}{(n+1)!}$$



$\square$.

Teorema (formula di Taylor con resto di Peano)

Sia f derivabile $n-1$ volte in un intervallo intorno a x_0 e $f^{(n-1)}$ è derivabile in x_0. Sia P il P. di Taylor di ordine n per f centrato in x_0. Sia $n>0$.

Allora: $$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P(x)}{(x-x_0)^n} = 0} \quad (*)$$

ovvero:

$$\boxed{f(x) = P(x) + o\left((x-x_0)^n\right)}$$

dim Per induzione su n.

Per $n=1$: Tesi: $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)]}{x-x_0} \overset{?}{=} 0$$

$$\boxed{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} - f'(x_0) \longrightarrow f'(x_0)-f'(x_0) = 0.$$

definizione di derivata.

Supponiamo il teorema sia valido per $n-1$ e dimostriamo che vale anche per n.

Devo mostrare $(*)$ Cauchy come nel teorema precedente

Ipotesi induttiva

$$\boxed{\frac{f(x)-P(x)}{(x-x_0)^n}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{f'(y)-P'(y)}{(y-x_0)^{n-1}} \longrightarrow \frac{1}{n}\cdot 0$$

per $y\to x_0$

Ma se $x\to x_0$ visto che y è tra x_0 e x, $y\neq x_0$

an dy $\quad y \to x_0 \qquad y = y(x)$ $\square$

Per adesso ci disinteressiamo di Peano e torniamo a Lagrange.

Lagrange può essere utilizzato per dimostrare che una funzione è analitica.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \boxed{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}} (x-x_0)^k$$

Serie di Taylor.

Se f è analitica $\quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k$

allora f è derivabile e $\quad f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot a_k (x-x_0)^{k-1}$

$$\ldots\ldots \qquad f''(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k (x-x_0)^{k-2}$$

$$\vdots$$

f è di classe C^∞ e necessariamente $\quad a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

Osservazione $\quad$ Ma non tutte le funzioni C^∞ sono analitiche.

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{|x|}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$f'(x) \to 0$ per $x \to 0$

criterio di derivabilità

$\ldots\ldots$ f è C^∞ e $\quad f^{(k)}(0) = 0.$

Se f fosse analitica $\quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cancel{f^{(k)}(0)}}{k!} x^k = \sum 0 = 0.$

assurdo.

Teorema (criterio di analiticità)

Sia f di classe C^∞ su un aperto I.
Supponiamo che $\forall x_0 \in I\ \exists r > 0\ \exists M > 0\ \exists L > 0$ tali che

$$\left| \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \right| \le M \cdot L^k \qquad \forall x : |x - x_0| < r$$

Allora f è analitica.

dim Applicando la formula di Taylor con resto di Lagrange basta notare che:

$$\frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to +\infty$$

Ipotesi

$$\frac{|f^{(n+1)}(y)|}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \le M \cdot \underbrace{L^{n+1} \cdot |x - x_0|^{n+1}}$$

$$= M (L \cdot |x - x_0|)^{n+1} \to 0$$

Se $|x - x_0| < \frac{1}{L}$ $\quad \square$.

Esercizio $\boxed{\wedge}$ Dimostrare che $\ln x$ è analitica.