ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 57 - 23.2.2024

[oggi 16:30 ricevimento]

Esercizio $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Svolgimento.

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

Scambio della derivata con l'integrale.

LO VERIFICHIAMO ALLA FINE

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} = -2x e^{-x^2(1+t^2)} = -2x\, e^{-x^2} e^{-x^2t^2}$$

$$F'(x) = -2x\, e^{-x^2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}\,dt \qquad \begin{pmatrix} s = xt \\ ds = x\,dt \end{pmatrix}$$

$$= -2e^{-x^2}\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\,ds$$

$$= -2e^{-x^2}\cdot G. \qquad G = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

$$\int_0^{+\infty} F'(x)\,dx = -2G\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = -2G^2$$

$\boxed{F'(x) \text{ è continua}}$ $\Rightarrow$ ||

$$\left[F(x)\right]_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(0)$$

$$F(0) = \int_0^{+\infty}\frac{e^0}{1+t^2}\,dt = \left[\operatorname{arctg} t\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

$x \to +\infty$

$$0 \le f(x,t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \le \frac{e^{-x^2}}{1+t^2}$$

$$0 \le F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt \le e^{-x^2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$= e^{-x^2}\cdot\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$$

per $x \to +\infty$

$$-2G^2 = -\frac{\pi}{2} \qquad G^2 = \frac{\pi}{4} \qquad G = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \square$$

Perché posso scambiare l'integrale con la derivata?

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt} \leftarrow (*)$$

<u>Teorema</u> lo posso fare se $\exists\, g(t)$ t.c.

(Teor. 6.56 sugli appunti) $\rightarrow$

$$\boxed{\left|\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\right| \le g(t)} \quad \forall x \in I$$

e $\int_a^b g(t) < +\infty$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ continua

Se voglio che $(*)$ sia vera per un certo $x = x_0$

Basta verificare le ipotesi in $I = [x_1, x_2]$

con $x_1 < x_0 < x_2$

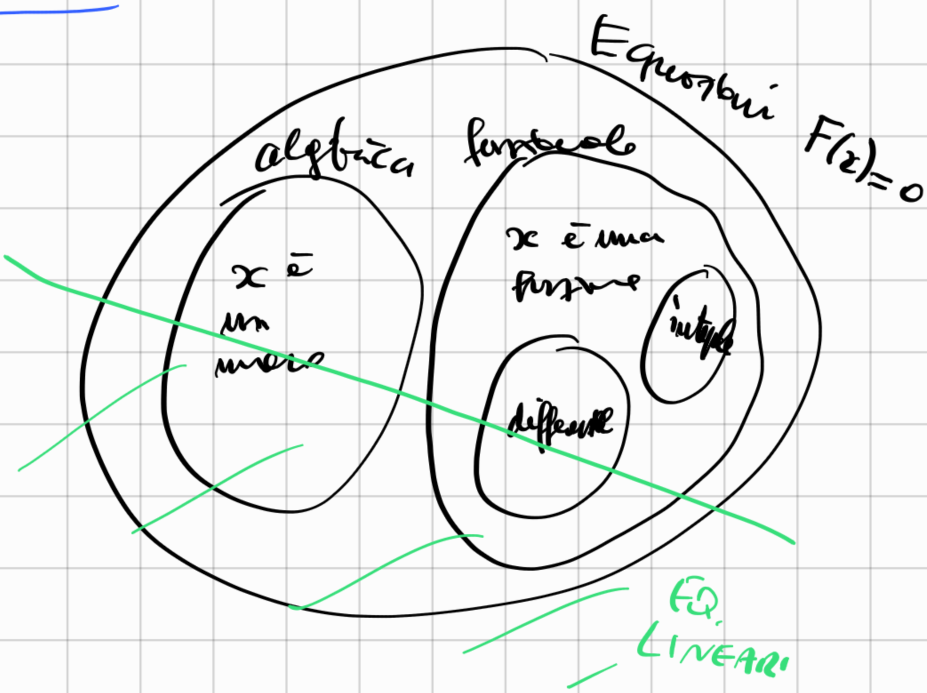
$$f(x,t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \qquad \text{se } x \in [x_1, x_2]$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = 2x\,e^{-x^2(1+t^2)} \le 2x_2\,e^{-x_1^2(1+t^2)} = g(t)$$

$$g(t) \ll \frac{1}{t^2} \text{ per } t \to +\infty \Rightarrow \int_0^{+\infty} g < +\infty \qquad \square$$

EQUAZIONI

- $u = u(x)$
  $x = x(t)$
  $y = y(t)$
  $y = y(x)$



$u \quad \sqrt{u^2(x)+1}$

Du

$\int u$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

L'incognita è una funzione $\underline{u} = \underline{u}(\underline{x})$

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{u} \mathbb{R}^d$$
$$\underline{x} \longmapsto \underline{u}(\underline{x})$$

NOI FACCIAMO QUESTO

Se $m = 1$, $x \in \mathbb{R}$, u è funzione di una sola variabile, posso derivare solo rispetto x.

EDO $\longrightarrow$ ODE in inglese

$u(x)$, $u'(x)$, $u''(x)$ ..... eq. diff. ordinarie

NON FACCIAMO

Se $m > 1$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$ $\quad \underline{x} = (x_1, \dots, x_m)$

DERIVATE PARZIALI $\longrightarrow$ $\underbrace{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \dots}_{\nabla u}$ $\dfrac{\partial u}{\partial x_m}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, ...,

in inglese

EDP $\longrightarrow$ PDE

equazioni alle derivate parziali

$$\Delta u = \rho \qquad \frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 u}{(\partial y)^2} + \frac{\partial^2 u}{(\partial z)^2} = \rho(x,y,z)$$

eq. di Laplace

$$u_t = \Delta u \leftarrow \text{equazione del calore}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Consideriamo quindi: $\underline{u} = \underline{u}(x) \in \mathbb{R}^d$. $x \in \mathbb{R}$

$$F\left(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)\right) = 0$$

in forma implicita

$$F : \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \dots \times \mathbb{R}^d}_{n\text{ volte}}$$

$x^2 + y^2 = 1$ implicita

$y = \sqrt{1 - x^2}$ forma normale

- "locale" nel senso che u e le derivate di u sono calcolate tutte allo stesso istante x.

(Altri esempi: equazioni con ritardo)

FORMA NORMALE

$$u^{(n)}(x) = f\left(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x)\right).$$

n = ordine dell'equazione.

Esempio

$$u''(x) + \sin\big(u(x)\big) + u'(x) = 0 \qquad \forall x$$

eq. diff. ordinaria, II ordine, forma implicita

$$\rightarrow F\left(x, u(x), u'(x), u''(x)\right) = 0$$

$$\rightarrow F(x, y, z, w) = \underline{w + \sin y + z}$$

- Se F non dipende (esplicitamente) da x

diremo che l'eq. è autonoma.

[Oss: Se $u(x)$ è sol. di una equazione autonoma anche $u(x+T)$ è soluzione]

In forma normale diventa:

attrito viscoso

$$u''(x) = -\sin(u(x)) - u'(x)$$

è l'equazione di Newton di un pendolo smorzato.

$F = ma$ $\qquad a = \frac{F}{m}$

$$u''(x) = f(x, u(x), u'(x))$$

$$f(x,y,z) = -\sin y - z$$

$$\boxed{u''(x) = -u(x) - u'(x)} \quad \leftarrow \quad \sin y \sim y$$

oscillatore armonico smorzato

Equazione lineare in quanto

$$f(x,y,z) = -y - z$$

lineare.

⚠ La linearità non riguarda la variabile x

$$u''(x) = \sqrt{x} \cdot u'(x) + |\sin x| \cdot u(x)$$

è lineare!

In effetti posso pensare all'eq. differenziale nello spazio delle funzioni:

$$u'' = f_1 \cdot u' + f_2 \cdot u$$

$$u'' = T(u)$$

$$T(u) = f_1 \cdot u' + f_2 \cdot u \qquad T : C^2 \to C^0$$

è lineare

$$T(u+v) = f_1 (u+v)' + f_2 (u+v)$$

$$= f_1 \cdot u' + f_1 v' + f_2 \cdot u + f_2 \cdot v$$

$$= T(u) + T(v).$$

$$T(\lambda u) = f_1 \cdot (\lambda u)' + f_2 \cdot (\lambda u)$$

$$= \lambda f_1 \cdot u' + \lambda \cdot f_2 \cdot u$$

$$= \lambda T(u).$$

Problema di Cauchy

Eq. diff. in forma normale.

ordine n

$$\begin{cases} u^{(n)}(x) = f(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x)) \\ u(x_0) = y_0 \\ u'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

n condizioni iniziali.

Per questo problema ci aspettiamo (sotto opportune ipotesi) esistenza e unicità della soluzione.