Analisi Matematica A e B
Prova scritta parziale n. 2

Laurea in Fisica, a.a. 2023/24
Università di Pisa

24 febbraio 2023

1. (a) Determinare il numero di soluzioni (reali positive) dell'equazione
$$(1 + \ln x)^2 = x.$$
   (b) Siano a e b rispettivamente la più piccola e la più grande delle soluzioni dell'equazione precedente. Determinare chi è più grande tra $\frac{1}{a}$ e b.

2. *Esercizio 2.* Determinare i valori del parametro $\alpha > 0$ per i quali la seguente serie numerica converge:
$$\sum_k \frac{1}{k^\alpha} - \sin\left[\left(\sin\frac{1}{k}\right)^\alpha\right].$$

3. *Esercizio 3.* Sia $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la successione di funzioni
$$f_n(x) = \operatorname{arctg}(x^n).$$
   (a) Determinare l'insieme I dei punti $x \in \mathbb{R}$ per i quali esiste, finito, il limite puntuale:
$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$
   Dimostrare che non c'è convergenza uniforme di f_n verso f su I.
   (b) Mostrare che per ogni $c \in (0,1)$ c'è convergenza uniforme sugli intervalli $[-1+c; 1-c]$ e $[1+c; +\infty)$.
   (c) Dimostrare che $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|\,dx = 0$.