ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 61 - 4.3.2024

Teorema di Cauchy-Lipschitz ($\exists !$)

$x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $\underline{f} : [a,b] \times \overline{B_R(y_0)} \to \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\begin{cases} \underline{u}'(x) = \underline{f}(x, \underline{u}(x)) \\ \underline{u}(x_0) = \underline{y}_0 \end{cases} \quad (*)}$$

Localmente $\exists !$ $u : I \to \mathbb{R}^n$ che risolve $(*)$

Ipotesi: (i) $\underline{f}$ è continua. $\to$ Weierstraß $\underline{f}(t, \underline{u}(t))$ è continua.

$*$ u è continua.

(ii) $\underline{f}$ è localmente lipschitz. unif. in y uniformemente rispetto a x:

$\exists L \; \forall x \; \forall \underline{y}_1, \underline{y}_2$: $\quad |\underline{f}(x, \underline{y}_1) - \underline{f}(x, \underline{y}_2)| \le L \cdot |\underline{y}_1 - \underline{y}_2|$

Dimostrato vista la volta scorsa.

Abbiamo usato questa disuguaglianza: $\quad a \le b$

Teo
$$\left| \int_a^b \underline{f}(x)\, dx \right| \le \int_a^b |\underline{f}(x)|\, dx$$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}^n \qquad$ Se $n = 1$ lo sappiamo.

def $\qquad \underline{f}(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$

$$\int_a^b \underline{f}(x)\, dx \doteq \left(\int_a^b f_1(x)\, dx, \dots, \int_a^b f_n(x)\, dx \right) \in \mathbb{R}^n$$

dim teo
$$\boxed{\underline{v} = \int_a^b \underline{f}(x)\, dx} \in \mathbb{R}^n$$

$$|v| \cdot \left| \int_a^b \underline{f}(x)dx \right| = \underline{v} \cdot \int_a^b \underline{f}(x)\, dx \qquad \int_a^b \underline{v} \cdot \underline{f}(x)\, dx = *$$

$|v|^2 = v \cdot v$

$$\sum_k v_k \cdot \int_a^b f_k \underset{\text{LINEARITA'}}{=} \int \sum_k v_k f_k$$

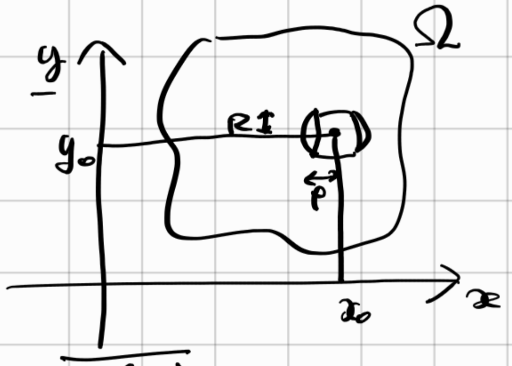
$$* \le \int_a^b \underbrace{|v|}\cdot|\underline{f}(x)|\,dx = |v|\int_a^b |f(x)|\,dx$$

$v\cdot w \le |v||w|$
e monotonia integrale.

Se $|v| = 0$ è banale: $0 \le \int_a^b |\underline{f}(x)|\,dx$

Se $|v| > 0$

$$\left|\int_a^b \underline{f}(x)\,dx\right| \le \int_a^b |\underline{f}(x)|\,dx. \quad \square$$



__Corollario__ Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ aperto

$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Se $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$

allora $\forall (x_0, y_0) \in \Omega$ $\exists\, \rho > 0, R > 0$

t.c. f soddisfa le ipotesi

di Cauchy-Lipschitz in $[x_0-\rho, x_0+\rho] \times \overline{B_R(y_0)}$.

Quindi

$$\begin{cases} \underline{u}'(x) = \underline{f}(x, \underline{u}(x)) \\ \underline{u}(x_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

ha una unica soluzione locale

$\hookrightarrow$ $\underline{u} : [x_0-\delta, x_0+\delta] \to \mathbb{R}^n$.

$\exists \delta \le \rho$. $\square$

① Cosa significa C^1?

$\underline{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$

$\underline{f} = (f_1, \dots, f_n)$

$f_k(\underline{x}) = f_k(x_1, x_2, \dots, x_d)$

derivate parziali $\longrightarrow$ $\dfrac{\partial f_k}{\partial x_j}\left[= \lim_{h\to 0} \dfrac{f_k(x_1, \dots, x_j + h, \dots) - f(\underline{x})}{h}\right]$

$$\boxed{D\underline{f} = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\right) \in \mathbb{R}^{d\times n}}$$

$f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ $\Big[$ Se f è C^0 e $\dfrac{\partial f_k}{\partial x_j}$ esistono su tutto Ω

e sono tutte continue.

__Proprietà__: composizione di funzioni C^1 è C^1.
(si riconduce alla composizione di funzioni di una variabile)

__dim__ Dobbiamo mostrare che f soddisfa

le ipotesi: (i) f continua per ipotesi.
(ii) $\exists L$ t.c. .....

Se fosse $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f \in C^1$

prendo $[a,b] \subseteq I$ $\quad f' \in C^0$ Weierstraß $\Rightarrow \exists L$

t.c. $|f'(x)| \leq L \quad \forall x \in [a,b]$.

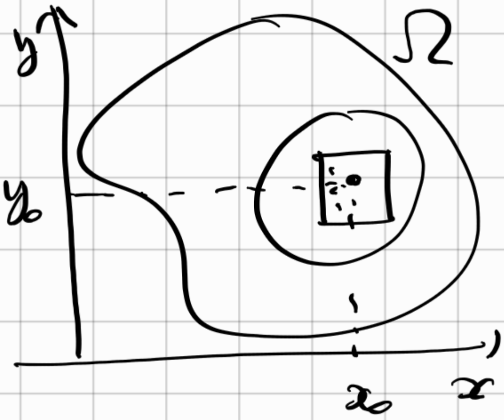
$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c) \cdot (x_1 - x_2) \quad \underline{\text{Lagrange}}$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(c)| \cdot |x_1 - x_2|$$
$$\leq L \cdot |x_1 - x_2|.$$

In più variabili: $(x_0, \underline{y}_0) \in \Omega$

scelgo ρ, R t.c.

$$K = [x_0 - \rho, x_0 + \rho] \times \overline{Q_R(y_0)} \subseteq \Omega$$

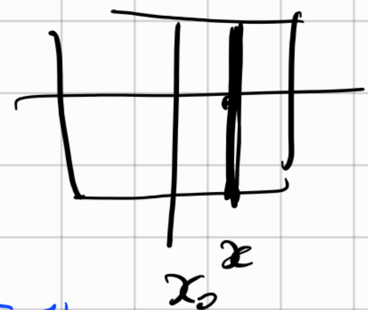


$$f: \tilde{K} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

K è chiuso e limitato

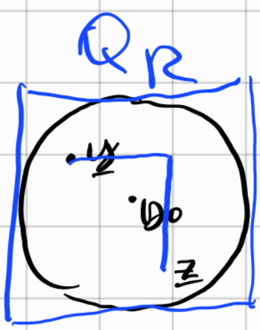
$$\boxed{\left|\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Weierstraß.}}}{\leq} L_{kj} \leq L}$$

$L = \max L_{kj}$



$$|f_k(x, \underline{y}) - f_k(x, \underline{z})|$$

$$\leq |f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) - f_k(x, z_1, \ldots z_n)|$$



$\{x\} \times \mathbb{R}^n$

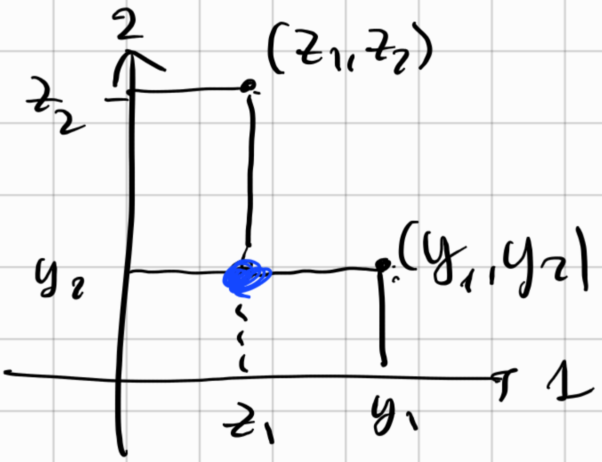
$$\leq |f_k(x, y_1 \ldots y_n) - f_k(x, z_1, y_2 \ldots y_n)| + |f_k(x, z_1, y_2 \ldots) - f_k(x, z_1, z_2, y_3 \ldots)|$$
$$+ \ldots \quad |f_k(x, z_1, \ldots, z_{n-1}, y_n) - f_k(x, z_1, \ldots z_n)|$$

$$= \left|\frac{\partial f_k}{\partial y_1}(c_1)\right| \cdot |z_1-y_1| + \left|\frac{\partial f_k}{\partial y_2}(c_2)\right| \cdot |z_2-y_2| + \dots + \left|\frac{\partial f_k}{\partial y_n}(c_n)\right| |z_n-y_n|$$

$$\le L \cdot |z-y| + \dots + L|z-y| = nL|z-y|.$$

$$|\underline{f}(x,\underline{y}) - \underline{f}(x,\underline{z})| = \sqrt{\sum \underbrace{|f_k(x,\underline{y}) - f_k(x,\underline{z})|^2}}$$

$$\le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} n^2 L^2 |z-y|^2} = \underbrace{\sqrt{n^3} \cdot L} \cdot |z-y| \qquad \square$$



$$|g(y_1,y_2) - g(z_1,z_2)| =$$

$$\le |g(y_1,y_2) - g(z_1,y_2)| + |g(z_1,y_2) - g(z_1,z_2)|$$

$$= |g_1(y_1) - g_1(z_1)| + |g_2(y_2) - g_2(z_2)|$$

$$g_1(t) := g(t,y_2) \qquad g_2(t) = g(z_1,t)$$

$$= |g_1'(c_1)|\,|y_1-z_1| + |g_2'(c_2)| \cdot |y_2-z_2|$$

$$g_1'(t) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(t,y_2) \qquad g_2'(t) = \frac{\partial g}{\partial y_2}(z_1,t).$$

Esempio $\boxed{u'(x) = \sin(x \cdot e^{u(x)})}$

$$= f(x, u(x))$$

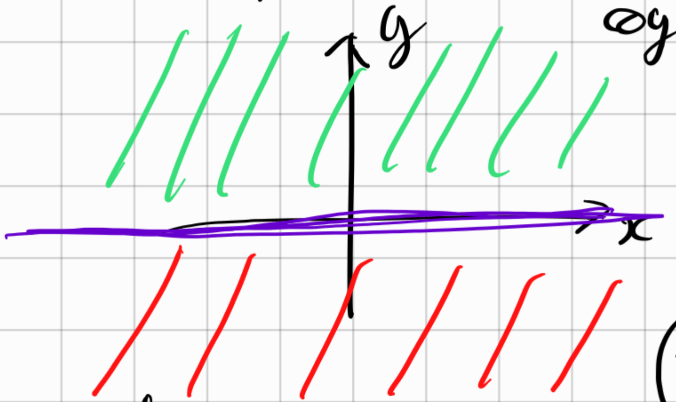
con $f(x,y) = \sin(x \cdot e^{y})$

$f \in C^1$ perché composizione di fn C^1.
soddisfa, localmente, le ipotesi di Cauchy-Lipschitz
Dunque l'eq. ha soluzione locale, unica.

Esempio $\boxed{u'(x) = \sqrt{u(x)}}$

$= f(x, u(x))$ con $f(x,y) = \sqrt{y}$

in questo caso $f \notin C^1$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ non esiste in $y=0$



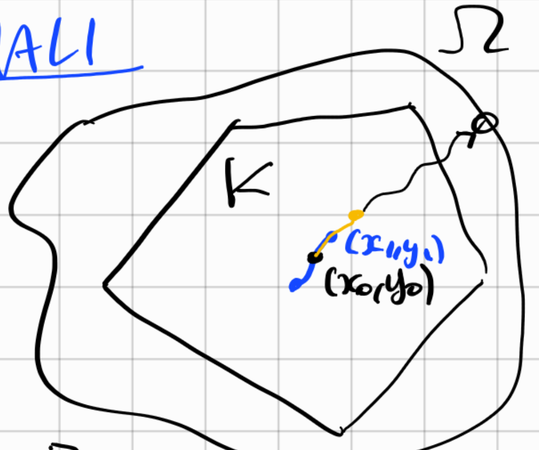
Il teorema non vale su $\{y \geq 0\}$

Ma il teorema vale su $\Omega = \{(x,y) : y > 0\}$

$f \in C^1(\Omega)$

$f \notin C^1(\bar{\Omega})$.

SOLUZIONI MASSIMALI



$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) \\ u(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (*)_0$$

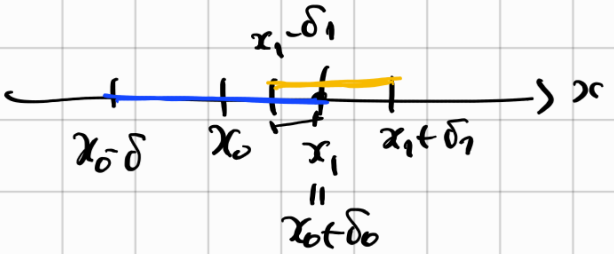
$f \in C^1(\Omega)$

$\exists\, \delta_0 \ \exists\, u_0 : \underbrace{[x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0]}_{I_0} \to \mathbb{R}$ soluzione di $(*)_0$ e u_0 è unica.

$x_1 = x_0 + \delta_0$

$y_1 = u_0(x_0 + \delta_0)$

$\exists\, \delta_1 \ \exists\, u_1 : \underbrace{[x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1]}_{I_1} \to \mathbb{R}$ soluzione di $(*)_1$ $\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) \\ u(x_1) = y_1 \end{cases}$



u_0 e u_1 devono coincidere su $I_0 \cap I_1$ per l'unicità!

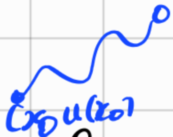
⚠ l'unicità è più difficile negli intervalli piccoli

A forza di estendere "arrivo al bordo di $\partial\Omega$"?

Sì! (Teorema di caratterizzazione delle soluzioni massimali (o teorema dell'asintoto))

(Formalmente $(x, u(x))$ esce da ogni compatto $K \subseteq \Omega$)

dim: solo l'idea.
estendo una soluzione locale il più possibile.



Sia I l'intervallo massimale di esistenza.

$I = (a,b)$ $\qquad x_0 \in (a,b)$

↑ se fosse chiuso potrei estenderlo in $(b, u(b))$

se u avesse limite finito in b $\qquad \lim_{x\to b^-} u(x) = \ell \in \mathbb{R}$

potrei estendere u anche in b ponendo $u(b) = \ell$.

$$u'(x) = f(x, u(x)) \Rightarrow u'(x) \to f(b, u(b)) = m$$

se $x \to b$.

allora (criterio di derivabilità)

$$\exists\, u'(b) = m = f(b, \ell).$$

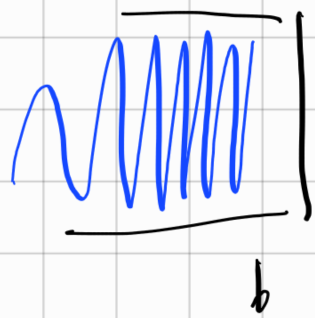
Alternative:

$$\begin{cases} \nexists \lim_{x\to b^-} u(x) \\ \lim_{x\to b^-} u(x) \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

← caso del compatto

↑ si esclude.

$\nexists \lim_{x\to b^-} u(x)$



ma in questo caso $|u'(x)| \to +\infty$ $\qquad u'(x) = f(x, u(x))$ è limitata su K perché f è limitata per Weierstraß

□