ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 64 – 11.3.2024

Teorema (già visto) Una eq. lineare di ordine n, in forma normale ha un insieme di soluzioni che è uno spazio affine di dimensione n.

dim Se l'eq. è omogenea l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale di dim. n. (già visto la volta scorsa).

Se l'eq. non è omogenea: $\underbrace{u^{(n)} - L[u]}_{A[u]} = f$

$$\left[u^{(n)} = L[u] \leftarrow \text{omogenea} \quad u^{(n)} - L[u] = 0 \right]$$

$A[u] = f$ con A lineare.

$(*)$ $A[u] = f$ ha soluzione per il teorema di $\exists!$ globale.

$\exists\, u_*$ soluzione (particolare) di $(*)$ (eq. non omogenea)

Tutte le soluzioni di $(*)$ si ottengono sommando a u_* le soluzioni della omogenea (associata):

$$(**) \qquad A[u] = 0.$$

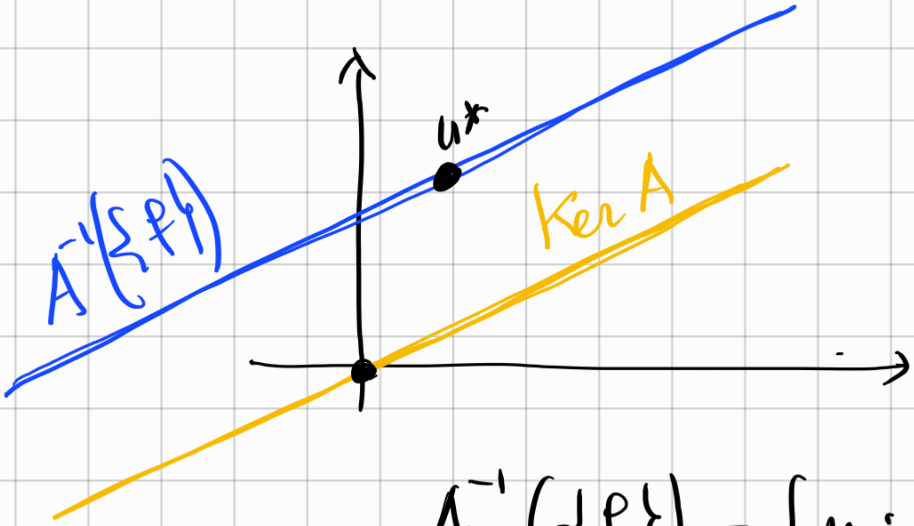
Infatti: Se u^* risolve $(*)$ e u risolve $(**)$

$$A[u^* + u] = A[u^*] + A[u] = f + 0 = f.$$

Viceversa se u risolve $(*)$ $\quad u = u^* + (u - u^*)$

Ma: $$f = A[u] = A[u^* + (u-u^*)] = A[u^*] + A[u-u^*] = f + A[u-u^*]$$

$$\Rightarrow A[u-u^*] = f - f = 0 . \qquad \square$$



u

$\operatorname{Ker} A = \{u : A[u] = 0\}$
$= \{$soluzioni di $(**)\}$

$$A^{-1}(\{f\}) = \{u : A[u] = f\}$$
$$= \{\text{soluzioni di } *\}.$$

ES 1 $\quad u'' - 3u' + 2u = e^{-x} \quad (*) \qquad f(x) = e^{-x}$

Metodo: I. risolvo l'omogenea associata: $u'' - 3u' + 2u = 0$ $(**)$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2)$$

2 soluzioni indipendenti: e^x, e^{2x}

tutte le sol. di $(**)$ sono: $u_0 = Ae^x + Be^{2x}$.

II. Basta trovare una sol. particolare di $(*)$.

Come si fa? 2 METODI:
(a) metodo di similarità
(b) metodo della variazione delle costanti

Metodo (a) si applica se f è combinazione lineare di funzioni del tipo $P(x)e^{\mu x}$
P polinomio $\quad \mu \in \mathbb{C}$.

$$f(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$$

Principio di sovrapposizione se

$$A[u_1] = f_1 \quad e \quad A[u_2] = f_2$$

$$A[c_1 u_1 + c_2 u_2] = c_1 f_1 + c_2 f_2$$

definizione di linearità

Nell'esercizio $f(x) = e^{-x}$ cerco una soluzione del tipo

$$u_*(x) = Ae^{-x}$$
$$u_*'(x) = -Ae^{-x}$$
$$u_*''(x) = Ae^{-x}$$

$$A[u_*] = u_*'' - 3u_*' + 2u_*$$

$$= Ae^{-x} - 3\cdot(-A)e^{-x} + 2Ae^{-x} = e^{-x}$$

$$A + 3A + 2A = 1$$

$$A = \frac{1}{6} \qquad u_*(x) = \frac{1}{6} e^{-x}$$

u_* è una sol. particolare di (*).

Tutte le soluzioni sono della forma:

2 parametri

$$u(x) = u_*(x) + u_0(x) = \frac{1}{6} e^{-x} + Ae^{x} + Be^{2x}$$

sol. omogenea.

indipendenti

Es 2 $\quad u''-3u'+2u=\underbrace{e^x}$

$$\lambda^2-3\lambda+2=0$$

L'omogenea è la stessa di prima: $u_0(x)=Ae^x+Be^{2x}$

Devo trovare una sol. particolare.

Posso sperare di trovare una sol. della forma: $u_*(x)=A\cdot e^x$?

NO: $A[u_*]=0\neq e^x$.

Idea

$$u_*(x)=Cx\cdot e^x$$
$$u_*'(x)=C(x+1)e^x$$
$$u_*''(x)=C(x+1+1)e^x = C(x+2)e^x$$

$$\boxed{P(x)e^{\lambda x}\ \xrightarrow{\ D\ }\ (\lambda P(x)+P'(x))e^{\lambda x}}$$

(*): $u_*''-3u_*'+2u_*=C[x+2-3(x+1)+2x]e^x$

$$=C[0\cdot x-1]e^x=-Ce^x\overset{!}{=}e^x \qquad C=-1$$

$u_*(x)=-xe^x$ è una sol. particolare

Tutte le soluzioni di (*) si scrivono nella forma:

$$u(x)=-xe^x+Ae^x+Be^{2x}$$
$$=(A-x)e^x+Be^{2x}.$$

Perché funziona? (il metodo di similarità)

$$u(x) = P(x) \cdot e^{\lambda x}$$

$$u'(x) = \underline{\left(\lambda P(x) + P'(x)\right)} e^{\lambda x}$$

$$A[u] = P(D)[u] \qquad P(\lambda) = \text{polinomio associato}$$

$$= (D-\lambda_1)^{m_1} \cdots (D-\lambda_k)^{m_k}$$

$$m_1 + \dots + m_k = n = \deg P.$$

Come agiscono i fattori $(D-\lambda)$ sulle funzioni $\underbrace{Q(x)\, e^{\mu x}}$

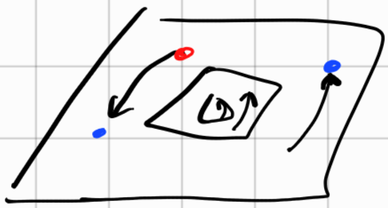
$$(D-\lambda)\left[Q(x)\cdot e^{\mu x}\right] = \underbrace{\left[\mu Q(x) + Q'(x) - \lambda Q(x)\right]} e^{\mu x}$$

$$= \begin{cases} \text{se } \mu = \lambda \longrightarrow Q'(x)\, e^{\mu x} \\ \text{se } \mu \neq \lambda \longrightarrow \left[(\mu-\lambda)Q(x) + Q'(x)\right] e^{\mu x} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (\text{polinomi di grado } \deg Q - 1)\ e^{\mu x} \\ (\text{polinomio di grado } \deg Q)\ e^{\mu x} \end{cases}$$

$(D-\lambda)$

$\mu = \lambda$



$\mu \neq \lambda$

Es 3 $\quad u'' - 3u' + 2u = x^3 e^{-x}$

Cerco u_p del tipo: $\quad u_p(x) = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)e^{-x}$

Pongo $\quad u_p'' - 3u_p' + 2u_p \overset{!}{=} x^3 e^{-x}$

Trovo $\left\{ M \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right.$ sistema lineare di 4 eq. in 4 incognite.

Se è tutto fatto bene avrai soluzione.

E se $\mu \in \mathbb{C}$?

Esempio 4 $\quad u'' - 3u' + 2u = \sin x$ $\qquad \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \mu = \mp i \qquad \mu \neq \lambda_k$$

$$u_p = \tilde{A} e^{ix} + \tilde{B} e^{-ix}$$

$$u_p = A \cos x + B \sin x.$$

$$u_p' = B \cos x - A \sin x$$

$$u_p'' = -A\cos x - B \sin x$$

$$u_p'' - 3u_p' + 2u_p = [-A - 3B + 2A] \cos x + [-B + 3A + 2B] \sin x$$

$$= \underbrace{(A - 3B)}\cos x + \underbrace{(B + 3A)} \sin x$$

$$\overset{!}{=} \sin x$$

$$\begin{cases} A-3B=0 \\ B+3A=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A-3(1-3A)=0 \\ B=1-3A \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10A-3=0 \\ \end{cases} \qquad \begin{cases} A=\frac{3}{10} \\ B=\frac{1}{10} \end{cases}$$

$$u_*(x) = \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x.$$

ES 5 $\quad u'' - 3u' + 2u = \sin^2 x$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad P(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)$$
$$= 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$u'' - 3u'' + 2u = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{0x} \qquad \cos 2x = \frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}$$

$$u_* = A + B\cos 2x + C\sin 2x.$$

ES 6 $\quad u'' - 3u' = 7$

$$\lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda-3)$$

Soluzioni omogenea: $u_0(x) = A + B\cdot e^{3x}$

Soluzione particolare: $u_f(x) = C \cdot x$

ES 7 $\quad u'' - 3u' = 7x \qquad \mu = 0$ è radice di $\lambda^2 - 3\lambda$.

u_0 come sopra:

$$u_f(x) = (Cx + D)x$$
$$= Cx^2 + Dx$$