Analisi Matematica A e B
Soluzioni prova scritta n. 1

Laurea in Fisica, a.a. 2023/24
Università di Pisa

21 maggio 2024

1. Per ogni k intero positivo si consideri la funzione

$$f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_k(x) = \frac{1-x}{1+kx^2}.$$

   (a) Determinare gli $x \in \mathbb{R}$ per i quali la serie $\sum(-1)^k f_k(x)$ converge.

   (b) Fissato k, calcolare i punti e i valori di massimo e minimo della funzione f_k.

   (c) Dire se la serie di funzioni $\sum(-1)^k f_k$ converge uniformemente su $\mathbb{R}$. E su $[1, +\infty)$?

Soluzione. Osserviamo che se $x \neq 0$ si ha $f_k(x) \to 0$ per $k \to +\infty$ mentre per $x = 0$ si ha $f_k(0) = 1$. Condizione necessaria per la convergenza della serie $\sum(-1)^k f_k(x)$ è che la successione $(-1)^k f_k(x)$ sia infinitesima, ossia che $f_k(x) \to 0$ per $k \to +\infty$. Dunque la serie non converge per $x = 0$. Fissato $x \neq 0$ osserviamo che la successione $f_k(x)$ è positiva e decrescente se $x < 1$ mentre è negativa e crescente se $x < 1$. In ogni caso si può applicare il teorema di Leibniz per dedurre che la serie $\sum(-1)^k f_k(x)$ converge.

Studiamo la funzione $f_k(x)$. Il segno, come già osservato, è positivo per $x < 1$ e negativo per $x > 1$. Per $x \to \pm\infty$ si ha chiaramente $f_k(x) \to 0$, dunque l'asse delle x è un asintoto orizzontale per il grafico di $y = f_k(x)$. La derivata è

$$f_k'(x) = \frac{-(1+kx^2) - (1-x)\cdot 2kx}{(1+kx^2)^2} = \frac{kx^2 - 2kx - 1}{(1+kx^2)^2}.$$

Usando la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado (o facendo il completamento del quadrato) si trova che $f_k'(x) > 0$ se e solo se $x > 1 + \sqrt{1 + 1/k}$ oppure $x < 1 - \sqrt{1 + 1/k}$. Dai criteri di monotonia, e dal fatto che all'infinito la funzione tende a zero, si deduce facilmente che $1 + \sqrt{1 + 1/k}$ è l'unico punto di minimo assoluto per la funzione mentre

$1-\sqrt{1+1/k}$ è l'unico punto di massimo assoluto. In tali punti la funzione assume dunque il valore minimo e il valore massimo:

$$\begin{aligned} f_k(1-\sqrt{1+1/k}) &= \frac{\sqrt{1+\frac{1}{k}}}{1+k\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{k}}\right)^2} \\ f_k(1+\sqrt{1+1/k}) &= \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{k}}}{1+k\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{k}}\right)^2}. \end{aligned}$$

Visto che la serie non converge per $x=0$ non ci può essere convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}$. Dimostriamo invece che sull'intervallo $[1,+\infty)$ invece c'è convergenza uniforme (anche se, si potrebbe osservare che non c'è convergenza totale). Su tale intervallo si ha $f_k(x)<0$. Per avere convergenza uniforme dobbiamo mostrare che

$$\sup_{x\geq 1}\left|\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k f_k(x)-\sum_{k=0}^{N}(-1)^k f_k(x)\right|\to 0 \qquad \text{per } N\to+\infty.$$

Ma, guardando la dimostrazione del teorema di Leibniz, sappiamo che

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k f_k(x)-\sum_{k=0}^{N}(-1)^k f_k(x)\right|\leq |f_{N+1}(x)|$$

e, per quanto visto prima, sappiamo anche che il valore massimo di $|f_k(x)|$ per $x\geq 1$ si ha quando $x=1+\sqrt{1+1/k}$ e vale:

$$\frac{\sqrt{1+\frac{1}{k}}}{1+k\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{k}}\right)^2}\to 0, \qquad \text{per } k\to+\infty$$

possiamo quindi concludere che la serie converge uniformemente su $[1,+\infty)$.

□

2. Sia $f\colon (0,1]\to[0,+\infty)$ una funzione di classe C^1 tale che $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}f'(x)\,dx$ converge. Mostrare che:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx<+\infty$;

   (b) esiste $C>0$ tale che $\sqrt{x}f(x)\leq C\sqrt{x}$ per ogni $x\in(0,1]$.

Soluzione. Osserviamo che si tratta di un integrale improprio in 0. Grazie alla formula di integrazione per parti sappiamo che,

$$\int_\alpha^1 \sqrt{x}f'(x)\,dx=\left[\sqrt{x}f(x)\right]_\alpha^1-\frac{1}{2}\int_\alpha^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx=f(1)-\sqrt{\alpha}f(\alpha)-\frac{1}{2}\int_\alpha^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Vogliamo ora passare al limite per $\alpha \to 0^+$. Il limite del lato sinistro esiste per ipotesi. Per quanto riguarda il lato destro osserviamo che essendo f non negativa anche l'integrale improprio $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ esiste (anche se potrebbe essere infinito). Per differenza si ottiene dunque che il limite $\lim_{\alpha\to 0^+} \sqrt{\alpha} f(\alpha)$ esiste ed è non negativo essendo f non negativa. Abbiamo quindi:

$$\int_0^1 \sqrt{x} f'(x)\,dx = f(1) - \lim_{\alpha\to 0^+} \sqrt{\alpha} f(\alpha) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx$$

ma il lato sinistro è finito, per ipotesi, e quindi nessuno dei due termini a destra può essere infinito, perché avendo lo stesso segno se anche solo uno dei due termini fosse infinito anche la loro somma sarebbe infinita. Dunque sono entrambi convergenti:

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \sqrt{\alpha} f(\alpha) \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx$$

e in particolare abbiamo dimostrato la richiesta (a). Ma se una funzione è continua su $(0,1]$ e il limite per $x \to 0^+$ esiste ed è finito allora la funzione si può estendere con continuità al punto $x = 0$ e la funzione risultante dovrà essere limitata grazie al teorema di Weiestrass. Questa osservazione si applica alla funzione $\sqrt{x} f(x)$ che, essendo positiva e limitata dovrà dunque soddisfare la condizione del punto (b).

Non era richiesto, ma si può osservare che il limite di $\sqrt{x} f(x)$ deve in effetti essere uguale a zero, perché altrimenti avremmo $f(x) \sim \frac{C}{\sqrt{x}}$ per $x \to 0^+$ e l'integrale non potrebbe convergere essendo la funzione integranda asintotica a $\frac{C}{x}$.

$\square$

3. (a) Dimostrare che la funzione $f(y) = \sqrt{|y|+1}$ è lipschitziana.
   (b) Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$ trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \sqrt{|u|+1}, \\ u(x_0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione. Si ha

$$\left|\sqrt{|y|+1} - \sqrt{|w|+1}\right| = \left|\frac{|y|+1-|w|-1}{\sqrt{|y|+1}+\sqrt{|w|+1}}\right| \le \frac{|y-w|}{2}.$$

E dunque la funzione f è $\frac{1}{2}$-lipschitziana.

In alternativa si può osservare che la funzione è derivabile sugli intervalli $(0,+\infty)$ e $(-\infty,0)$ e che su entrambi gli intervalli la derivata è limitata.

Dunque la funzione, che nel punto $x = 0$ è continua, risulta essere lipschitziana separatamente sugli intervalli $[0, +\infty)$ e $(-\infty, 0]$ grazie al teorema di Lagrange, e alla limitatezza della derivata. Ma, visto che i due intervalli hanno intersezione non vuota, la funzione è lipschitziana sulla loro unione, ossia su tutto $\mathbb{R}$.

Grazie all'osservazione precedente sappiamo a priori che l'equazione differenziale soddisfa il teorema di esistenza e unicità globale. Questa constatazione è rassicurante ma non realmente necessaria per svolgere il punto seguente.

Per quanto riguarda l'equazione differenziale, osserviamo che il lato destro dell'equazione è sempre non inferiore a 1. Dunque ogni soluzione u risulta essere strettamente crescente sugli intervalli in cui è definita. Se $u(x_0) = 0$ si avrà dunque che $u(x) > 0$ per $x > x_0$ e $u(x) < 0$ per $x < x_0$. Consideriamo allora separatamente l'intervallo $x \geq x_0$ dove si avrà $|u(x)| = u(x)$ dall'intervallo $x \leq x_0$ dove si avrà $|u(x)| = -u(x)$.

Per $x \geq x_0$ si ha, separando le variabili e integrando ambo i membri:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u+1}} = x + c$$

ovvero

$$2\sqrt{u+1} = x + c.$$

Imponendo la condizione iniziale $u(x_0) = 0$ si trova $c = 2 - x_0$ e dunque

$$2\sqrt{u+1} = x - x_0 + 2.$$

Ricordando che in questo intervallo $u > 0$ e quindi $u + 1 > 0$, si ottiene

$$u(x) = \frac{(x - x_0 + 2)^2}{4} - 1.$$

Per $x \leq x_0$ si procede in maniera analoga ponendo $|u| = -u$:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u}} = x + c$$

da cui

$$-2\sqrt{1-u} = x + c$$

e, imponendo la condizione iniziale, si trova $c = -2 - x_0$ e dunque, osservando che $1 - u > 0$, si ottiene

$$u(x) = 1 - \frac{(x_0 + 2 - x)^2}{4}.$$

In conclusione la soluzione del problema di Cauchy è:

$$u(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_0+2)^2}{4} - 1 & \text{per } x \geq x_0 \\ 1 - \frac{(x_0+2-x)^2}{4} & \text{per } x \leq x_0. \end{cases}$$

$\square$