

# Analisi Matematica A e B

## Prova scritta n. 1

Laurea in Fisica, a.a. 2023/24  
Università di Pisa

21 maggio 2024

1. Per ogni  $k$  intero positivo si consideri la funzione

$$f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \frac{1-x}{1+kx^2}.$$

- (a) Determinare gli  $x \in \mathbb{R}$  per i quali la serie  $\sum (-1)^k f_k(x)$  converge.
- (b) Fissato  $k$ , calcolare i punti e i valori di massimo e minimo della funzione  $f_k$ .
- (c) Dire se la serie di funzioni  $\sum (-1)^k f_k$  converge uniformemente su  $\mathbb{R}$ . E su  $[1, +\infty)$ ?
2. Sia  $f: (0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$  una funzione di classe  $C^1$  tale che  $\int_0^1 \sqrt{x} f'(x) dx$  converga. Mostrare che:
- (a)  $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx < +\infty$ ;
- (b) esiste  $C > 0$  tale che  $\sqrt{x} f(x) \leq C\sqrt{x}$  per ogni  $x \in (0, 1]$ .
3. (a) Dimostrare che la funzione  $f(y) = \sqrt{|y|+1}$  è lipschitziana.
- (b) Fissato  $x_0 \in \mathbb{R}$  trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \sqrt{|u|+1}, \\ u(x_0) = 0. \end{cases}$$