

## Prova scritta di Analisi - Laurea in Fisica

12 luglio 2024

COGNOME:	NOME:	MATR.:
----------	-------	--------

**Esercizio 1.** Al variare del parametro reale  $\alpha > 0$ , discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n^\alpha} \right) \right)^n - 1 \right].$$

**Esercizio 2.** Per  $x > 0$  e  $a \in \mathbb{R}$  si consideri la funzione definita da

$$F_a(x) = \int_0^{x^a} \frac{e^{-\frac{1}{t^2}}}{t^2} dt.$$

- (1) Mostrare che  $F_a: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  è ben definita per ogni  $a \in \mathbb{R}$ .
- (2) Mostrare che esiste finito il limite  $\lim_{x \rightarrow 0^+} F_a(x)$  per ogni  $a \in \mathbb{R}$ .
- (3) Mostrare che la funzione, prolungata ponendo  $F_a(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F_a(x)$ , è derivabile in  $x = 0$  e calcolare  $F'(0)$ .

**Esercizio 3.** Per  $s \geq 0$ , si consideri il problema di Cauchy lineare del secondo ordine

$$\begin{cases} u''(x) + 2su'(x) + u(x) = 0, \\ u(0) = 1, \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

- (1) Per quali valori di  $s$  la soluzione è positiva su  $[0, +\infty)$ ?
- (2) Per quali valori di  $s$  la soluzione è monotona su  $[0, +\infty)$ ?