Prova scritta di Analisi - Laurea in Fisica

7 gennaio 2025

SOLUZIONI

Esercizio 1. Al variare del parametro reale $\alpha > 0$, discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)^\alpha - n^\alpha} .$$

Prima soluzione: Raccogliendo n^α al denominatore

$$\frac{n}{(n+1)^\alpha - n^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{(1+\frac{1}{n})^\alpha - 1} = \frac{n^{1-\alpha}}{e^{\alpha \log(1+\frac{1}{n})} - 1}.$$

Inoltre, considerando che $\alpha > 0$, poichè $e^{\alpha \log(1+\frac{1}{n})} - 1 \sim \alpha \log(1 + \dfrac{1}{n}) \sim \dfrac{\alpha}{n}$, si ottiene:

$$\frac{n}{(n+1)^\alpha - n^\alpha} \sim \frac{n^{2-\alpha}}{\alpha},$$

per cui trattandosi di serie a termini di segno costante per confronto asintotico con la erie armonica generalizzata di termini $\dfrac{1}{n^{\alpha-2}}$, vi è convergenza se e solo se $\alpha > 3$.

Seconda soluzione: come prima $\dfrac{n}{(n+1)^\alpha - n^\alpha} = \dfrac{n^{1-\alpha}}{(1+\frac{1}{n})^\alpha - 1}$,
considerando quindi lo sviluppo biomiale al primo ordine $(1+t)^\alpha = 1+\alpha t+O(t^2),\ t \to 0$, ovvero la serie biomiale $(1 + t)^\alpha = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} t^k,\ |t| < 1$, si ottiene direttamente per $t = \frac{1}{n}$, $n > 1$:

$$\frac{n}{(n+1)^\alpha - n^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{\frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \sim \frac{n^{2-\alpha}}{\alpha}.$$

Si conclude per confronto asintotico essendo serie a termini di segno costante.

Esercizio 2. Dati x_0, $u_0 \in \mathbb{R}$:

(1) si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) = e^x(e^{u(x)} + e^{-u(x)}) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}.$$

(2) Si dica per quali dati iniziali la soluzione ha il dominio limitato.

1) L'equazione differenziale è a variabili separabii del primo ordine, $u'(x) = f(x)g(u(x)) = F(x, u(x))$. Essendo $f(x) = e^x$, $g(p) = 2\cosh p$ funzioni $C^1(\mathbb{R})$ si è nelle ipotesi del teorema di Cauchy-Lipschitz, e il problema ai dati iniziali ha un unica soluzione, definita in un intorno di x_0. Sia I l'intervallo massimale di esistenza di tale soluzione.
Poichè $g \geq 2 > 0$, dividendo per $g(x)$ e raccogliendo $e^{-u(x)}$ in tale denominatore:

$$(e^x)' = e^x = \frac{u'(x)}{e^u(x) + e^{-u(x)}} = \frac{e^{u(x)}u'(x)}{1 + e^{2u(x)}} = \left(\operatorname{artan} e^{u(x)}\right)'$$

per cui $e^x + c = \operatorname{artan} e^{u(x)}$. Imponendo le condizioni iniziali si ottiene $c = \operatorname{artan} e^{u_0} - e^{x_0}$:

$$\forall x \in I \ \operatorname{artan} e^{u(x)} = e^x + \operatorname{artan} e^{u_0} - e^{x_0}, \tag{A}$$

poichè $\operatorname{artan} e^{u(x)} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, calcolando, nell'ordine, la funzione tangente e quindi il logaritmo dei due membri dell'eguaglianza necessaria, si esplicita u:

$$\forall x \in I \ u(x) = \log \tan \left(e^x + \operatorname{artan} e^{u_0} - e^{x_0}\right). \tag{B}$$

2) Si tratta in sostanza di esplicitare l'intervallo massimale di esistenza del problema di Cauchy con dati x_0, u_0. Dalla relazione (A), necessariamente deve essere

$$\forall x \in I \ 0 < e^x + \operatorname{artan} e^{u_0} - e^{x_0} < \frac{\pi}{2} \ \Leftrightarrow$$
$$\forall x \in I \ e^{x_0} - \operatorname{artan} e^{u_0} < e^x < e^{x_0} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{artan} e^{u_0} \ :$$

i) se $e^{x_0} - \operatorname{artan} e^{u_0} \leq 0$ la prima diseguaglianza è sempre verificata, e quindi, passando ai logaritmi, l'unica condizione su I è

$$\forall x \in I \ x < \log\left(e^{x_0} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{artan} e^{u_0}\right),$$

d'altronde per ognuno di tali x è ben definita la funzione in (B) ed è soluzione.
Quindi se $e^{x_0} - \operatorname{artan} e^{u_0} \leq 0$ si ha $I = \left(-\infty; \log\left(e^{x_0} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{artan} e^{u_0}\right)\right)$;

ii) invece se $e^{x_0} - \operatorname{artan} e^{u_0} > 0$, si ottiene

$$\forall x \in I \ \ \log\left(e^{x_0} - \operatorname{artan} e^{u_0}\right) < x < \log\left(e^{x_0} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{artan} e^{u_0}\right)$$

e con ragionamento analogo, I è *limitato*:

$$I = \left(\log\left(e^{x_0} - \operatorname{artan} e^{u_0}\right); \log\left(e^{x_0} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{artan} e^{u_0}\right)\right).$$

Esercizio 3. Sia $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin\, t}{t-x}\, dt$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,\, 1\}$.

(1) Si mostri che, per $0<|x|<1$ o per $x>1$, è ben definito $F(x)$ ed è un numero reale.
(2) Si studino i limiti di $F(x)$ per x che tende a 0, 1, e $+\infty$.
(3) Per quali $x \le -1$ è ben definita $F(x)$, eventualmente come integrale improprio? Per quali è un integrale convergente?

1) Se $|x|<1$ o $x>1$ ($x \neq 0$) si ha che x non *appartiene all'intervallo chiuso limitato di estremi* x^2 *e* x^3. Quindi $f_x(t) = \dfrac{\sin t}{t-x}$ è continua in tale intervallo, per cui è ivi Riemann integrabile. Essendo $F(x)$ l'integrale di f_x è un ben definito numero reale.

2) Per tali x può esser utile effettuare il cambio di variabile $s = t - x$, che, nel caso, permette di eliminare la variabile x nella funzione integranda.
Infatti, se $|x| < 1$ o $x > 1$ si ha che 0 non è nell'intervallo chiuso di estremi $x^2 - x$ ed $x^3 - x$ (per cui tali estremi hanno lo stesso segno), e quindi:

$$F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin\, t}{t-x}\, dt = \int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{\sin\,(s+x)}{s}\, ds = \sin x \int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{\cos\, s}{s}\, ds + \cos x \int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{\sin\, s}{s}\, ds$$

$$=: A(x) + B(x).$$

i) $x \to 0$: $|B(x)| \le \left| \displaystyle\int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{|\sin s|}{|s|}\, ds \right| \le \left| \displaystyle\int_{x^2-x}^{x^3-x} ds \right| = |x^3 - x^2|$,

$$|A(x)| \le |x| \left| \int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{1}{|s|}\, ds \right| = |x| \left| \log|x^3-x| - \log|x^2-x| \right| = |x|\, |\log(x+1)|.$$

Quindi $F(x) \to 0$ per $x \to 0$.

ii) $x \to +\infty$: A e B sono prodotto delle funzioni limitate, rispettivamente $\sin x$ e $\cos x$, per le funzioni $\displaystyle\int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{\cos\, s}{s}\, ds$, $\displaystyle\int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{\sin\, s}{s}\, ds$. Queste sono infinitesime per $x \to +\infty$:

$$\int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{\cos\, s}{s}\, ds = \int_{2}^{x^3-x} \frac{\cos\, s}{s}\, ds - \int_{2}^{x^2-x} \frac{\cos\, s}{s}\, ds,$$

$$\int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{\sin\, s}{s}\, ds = \int_{2}^{x^3-x} \frac{\sin\, s}{s}\, ds - \int_{2}^{x^2-x} \frac{\sin\, s}{s}\, ds,$$

ed $\exists \displaystyle\lim_{c\to+\infty} \int_2^c \frac{\cos\, s}{s}\, ds,\ \lim_{c\to+\infty} \int_2^c \frac{\sin\, s}{s}\, ds \in \mathbb{R}$, $x^2 - x,\ x^3 - x \to +\infty$ per $x \to +\infty$.

Quindi anche in questo caso $F(x) \to 0$ per $x \to +\infty$.

iii) $x \to 1$: come sopra $|B(x)| \le |x^3 - x^2| \to 0,\ x \to 1$,

$$A(x) = \sin x \int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{1}{s}\, ds - \sin x \int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{1-\cos s}{s}\, ds = \sin x \log(x+1) - \sin x \int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{O_{s\to 0}(s^2)}{s}\, ds,$$

il primo integrale tende a $\sin 1 \log 2$, il secondo a 0 per $x \to 1$ in quanto gli estremi di integrazione sono infinitesimi e l'integranda è prolugabile con continuità in 0.

3) - Per $x = -1$ si ha $F(x) = \displaystyle\int_1^{-1} \frac{\sin t}{t+1}\, dt$ è ben definito come integrale impropio su $(-1;1]$: $F(x) = -\displaystyle\lim_{c\to -1^+} \int_c^0 \frac{\sin t}{t+1}\, dt + \text{numero} = +\infty$.

- Per $x < -1$ si ha $x^3 < x < -1 < 0 < 1 < x^2$, in particolare x è strettamente compreso tra x^3 ed x^2. Vi sono due casi:

i) $\sin x \neq 0$, cioè $x \neq -k\pi$, $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $x < -1$. In questo caso $F(x)$ non è ben definito come integrale improprio (nel caso si tenga presente che $x^3 < x < x^2$ e che $\sin x \neq 0$):

$$\begin{aligned}
\int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t}{t-x}\, dt &=_{def} \lim_{c\to x^+} \int_{x^2}^{c} \frac{\sin t}{t-x}\, dt + \lim_{d\to x^-} \int_d^{x^3} \frac{\sin t}{t-x}\, dt \\
&= -\lim_{c\to x^+} \int_c^{x^2} \frac{\sin t}{t-x}\, dt - \lim_{d\to x^-} \int_{x^3}^{d} \frac{\sin t}{t-x}\, dt \\
&= -\operatorname{sign}(\sin x)\left[+\infty + (-\infty)\right].
\end{aligned}$$

ii) $\sin x = 0$, cioè $x = -k\pi$, $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. In questo caso l'integranda è prolungabile con continuita' in $-k\pi$:

$$\frac{\sin t}{t+k\pi} = \frac{\sin((t+k\pi)-k\pi)}{t+k\pi} = (-1)^k \frac{\sin(t+k\pi)}{t+k\pi} \to (-1)^k,\ t \to -k\pi,$$

quindi l'integrale improprio $\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t}{t+k\pi}\, dt$ è ben definito e finito.

ADDENDA: per completezza si esaminiamo i comportamenti asintotici di F per $x \to -1$, e $x \to -\infty$. Sia $D = \{x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\} : \exists F(x) \in \mathbb{R}\}$.
Per prima cosa si osserva che:

-1 è solo punto di accumulazione sinistro di D,

$-\infty$ è punto di accumulazione di D $(-k\pi \to -\infty,\ k \to +\infty)$,

$-\infty$, -1, 0, 1, $+\infty$ sono gli unici punti di accumulazione di D.

i) $x \to -1^+$: per $-1 < x < 0$ come osservato $-1 < x < x^3 < 0 < x^2 < 1$. Con le notazioni introdotte al punto 2):

$$F(x) = \sin x \int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{\cos\ s}{s}\, ds + \cos x \int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{\sin\ s}{s}\, ds : A(x) + B(x)$$

$B(x) \to -\cos 1 \displaystyle\int_0^2 \frac{\sin s}{s}\, ds$, $x \to -1^+$,

$A(x) = \sin x \log(x+1) - \sin x \displaystyle\int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{O_{s\to 0}(s^2)}{s}\, ds \to -\infty$, $x \to -1^+$.

Nota: $-\sin x \displaystyle\int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{O_{s\to 0}(s^2)}{s}\, ds \to \sin 1 \cdot \int_2^0 \frac{1-\cos s}{s}\, ds \in \mathbb{R}$, per $x \to -1^+$.

ii) $x \to -\infty$:

$$F(-k\pi) = (-1)^k \int_{k^2\pi^2}^{-k^3\pi^3} \frac{\sin(t+k\pi)}{t+k\pi}\, dt = (-1)^{k+1} \left[\int_{-k^3\pi^3+k\pi}^{0} \frac{\sin s}{s}\, ds + \int_0^{k^2\pi^2+k\pi} \frac{\sin s}{s}\, ds \right],$$

poichè $\frac{\sin s}{s}$ è pari ed ha integrale improprio *non nullo* su tutto $\mathbb{R}$ si ha che $\nexists \lim_{x\to-\infty} F(x)$.