ELEMENTI di CALCOLO delle VARIAZIONI
LEZIONE 10 - 7.11.2024

Def [L^p] $\quad \Omega$ aperto di $\mathbb{R}^n$

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : \begin{array}{l} u \text{ misurabile} \\ \int_\Omega |u|^p < +\infty \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

$u \sim v$ in L^p se $u(x) = v(x)$ per $\tilde{\forall} x \in \Omega$ $\leftarrow \left| \{ x : u(x) \neq v(x) \} \right| = 0$

$L^p(\Omega)$ è uno spazio di Banach

norma: $\quad \|u\|_p := \left(\int_\Omega |u|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : \begin{array}{l} u \text{ misurabile } \exists M \in \mathbb{R} \\ |u(x)| \leq M \quad \tilde{\forall} x \in \Omega \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

anche $L^\infty(\Omega)$ è un Banach

$$\|u\|_\infty := \inf \{ M : |u(x)| \leq M \quad \tilde{\forall} x \in \Omega \}$$

Def $\quad L^p_{loc}(\Omega) = \{ u : u_{|B} \in L^p(B) \quad \forall B \subset\subset \Omega \}$

[$B \subset\subset \Omega$ significa che $\overline{B}$ è compatto, $\overline{B} \subseteq \Omega$.]

$p > q \Rightarrow L^p(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$ $\quad$ se Ω ha misura finita

Def $\quad C^\infty_c(\Omega) = \{ \varphi : \Omega \to \mathbb{R},\ \varphi \in C^\infty,\ \operatorname{spt}\varphi \subset\subset \Omega \}$

$$\operatorname{spt}\varphi = \overline{\{ x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0 \}}$$

MOLLIFICATORI

Convoluzione: $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$(u * \psi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \cdot \psi(x-y) \, dy$$

Mollificatori $\rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

- $\rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$
- $\mathrm{spt}\,\rho_\varepsilon \subset\subset B_\varepsilon(0)$
- $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon = 1$
- $\rho_\varepsilon \geq 0$
- $\rho_\varepsilon(x) = f(|x|)$

$$u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon$$

1. $\frac{\partial}{\partial x_k}(u * \psi) = u * \frac{\partial}{\partial x_k} \psi$

2. $u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon \qquad u_\varepsilon \in C^\infty$

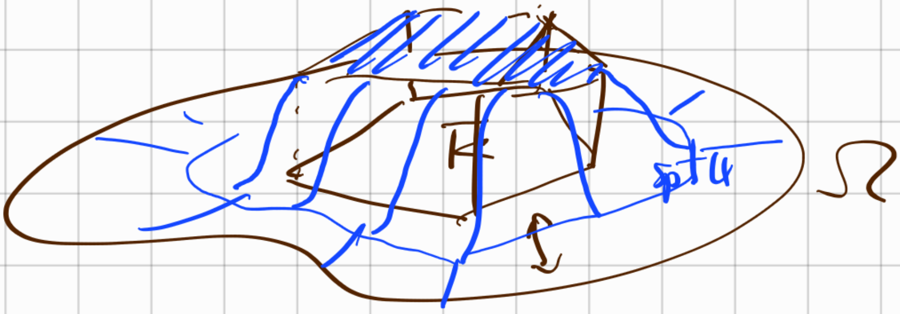
3. $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty \qquad u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon \to u$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$

4. $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^n)$

5. Dato $K \subset\subset \Omega$ esiste $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tale che

$$1\!\!1_K(x) \leq \psi(x) \leq 1$$

funzione caratteristica $1\!\!1_K(x) = \begin{cases} 1 & x \in K \\ 0 & x \notin K \end{cases}$

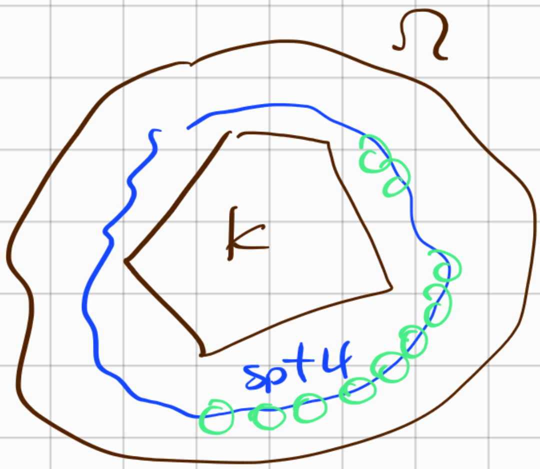


Lemma Fondamentale Sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega u(x)\cdot\varphi(x)\,dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Allora $u = 0$ in $L^1_{loc}(\Omega)$ (ovvero $u(x) = 0$ $\tilde{\forall} x \in \Omega$)

dim Sia $K \subset\subset \Omega$ compatto.



$\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ $\qquad \mathbb{1}_K \le \psi \le 1$

$u\cdot\psi \in L^1(\Omega)$ $\qquad u\cdot\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$u_\varepsilon = (u\cdot\psi) * \rho_\varepsilon$

$u_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ $\qquad$ se $\varepsilon < \operatorname{dist}(\operatorname{spt}\psi, \partial\Omega)$

$$u_\varepsilon(x) = \int_{\cancel{\mathbb{R}^n}\ \Omega} u(y)\cdot\underbrace{\psi(y)\cdot\rho_\varepsilon(x-y)}_{C_c^\infty(\Omega)}\,dy = 0$$

$u_\varepsilon \xrightarrow{L^1(\mathbb{R}^n)} u\cdot\psi$ $\qquad u\cdot\psi = 0$

$\psi \equiv 1$ su K $\qquad u = 0$ q.o su K

$\forall K \subset\subset \Omega$ $\implies u = 0$ q.o. su Ω

□

Lemma [Du Bois-Reymond] (1-D)

Se $u \in L^1_{loc}(a,b)$ tale che

$$\int_a^b u(x)\,\varphi'(x)\,dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(a,b)$$

Allora $\exists\, c \in \mathbb{R}$ $\quad u = c$ in $L^1_{loc}(a,b)$ $\quad \left(u(x) = c \ \ \tilde{\forall} x\right)$

Oss $\quad u \in C^1 \qquad \int_a^b u\,\varphi' = -\int_a^b u'\,\varphi \implies u' = 0$

dim

Nota: $\varphi \in C_c^\infty(a,b)$ allora $\int_a^b \varphi = 0$

$\Downarrow \qquad \Updownarrow \qquad \Uparrow$

$\exists\, \psi \in C_c^\infty(a,b)$ t.c. $\varphi = \psi'$

$\psi(x) = \int_a^x \varphi$

$\psi(x) = 0$ in $[a, a+\varepsilon]$

$\psi(b) = \int_a^b \varphi = 0$

ma anche $\psi(x) = 0$ $\forall x \in [b-\varepsilon, b]$

$\int \varphi = \int \psi' = [\psi]_a^b = 0$

Sia $\psi \in C_c^\infty(a,b)$ qualunque e prendo $\mu \in C_c^\infty(a,b)$ tale che $\int_a^b \mu = 1$

$k \doteq \int_a^b \psi$ e notiamo che

$$\int_a^b (\psi - k\mu) = \int_a^b \psi - k\int_a^b \mu = k - k\cdot 1 = 0.$$

Per la Nota: $\exists\, \varphi \in C_c^\infty(a,b)$ t.c. $\varphi' = \psi - k\mu$

Per ipotesi

$$0 = \int_a^b u\cdot\varphi' = \int_a^b u\cdot\psi - k\cdot\underbrace{\int_a^b u\cdot\mu}_{c} = \Big(\underbrace{\int_a^b u\,\psi}_{=\int_a^b \psi}\Big) - k\cdot c$$

$$= \int_a^b (u\,\psi - \psi\cdot c) = \int_a^b (u-c)\cdot\psi$$

$\Longrightarrow \quad u - c = 0 \qquad \square$

$\uparrow$

lemma fondamentale

DERIVATA DEBOLE (o DISTRIBUZIONALE)

Sia $u \in L^1(a,b)$, $v \in L^1(a,b)$

Diremo che v è la derivata debole di u

se $\forall \varphi \in C_c^\infty(a,b)$ si ha $\displaystyle\int_a^b u\cdot\varphi' = -\int_a^b v\cdot\varphi$

Motivazione: se $u \in C^1$ $\displaystyle\int_a^b u\cdot\varphi' = \cancel{\left[u\cdot\varphi\right]_a^b} - \int_a^b u'\cdot\varphi$

$v = u'$ è la derivata debole di u.

Lemma (unicità della derivata debole) $u, v, w \in L^1(a,b)$

Se v e w sono derivate deboli di u

allora $v = w$ (in $L^1(a,b)$).

dim $\forall \varphi \in C_c^\infty(a,b)$ $\displaystyle\int_a^b u\cdot\varphi' = -\int_a^b v\cdot\varphi \overset{!}{=} -\int_a^b w\cdot\varphi$

$\displaystyle\int_a^b (v-w)\,\varphi = 0 \Longleftarrow$

(lemma Fondamentale) $\Longrightarrow v = w$ $\qquad \square$

Notazione Se v è la derivata debole di u scriveremo $v = u'$, come per la derivata classica.

⚠ u' è definita q.o. non puntualmente.

SPAZI di SOBOLEV 1D

Per $p \in [1, \infty]$ definiamo

derivata debole

$$W^{1,p}(a,b) = \left\{ u \in L^p(a,b) : \exists v \in L^p(a,b) : v = u' \right\}$$

$$\|u\|_{1,p} = \sqrt{\|u\|_p^2 + \|u'\|_p^2}$$ è equivalente a $\|u\|_p + \|u'\|_p$

Se $p=2$ $W^{1,2}$ è uno spazio euclideo (la norma deriva da un prodotto scalare)

$$(u,v)_{1,2} = \int_a^b u \cdot v + \int_a^b u' \cdot v'$$

Teo $W^{1,p}$ è uno spazio di Banach ($W^{1,2}$ è uno spazio di Hilbert)

dim Sia u_k di Cauchy in $W^{1,p}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} u_k \text{ è di Cauchy in } L^p & u_k \to u \text{ in } L^p \\ u_k' \text{ è di Cauchy in } L^p & u_k' \to v \text{ in } L^p. \end{cases}$$

$v \overset{?}{=} u'$

$\forall \varphi \in C_c^\infty(a,b)$ so che

$$0 \overset{!}{=} \int_a^b (u_k \cdot \varphi' + u_k' \varphi) \xrightarrow{k \to \infty} \int_a^b (u \cdot \varphi' + v \varphi) = 0$$

u_k' è la derivata debole di u_k

$u_k \cdot \varphi' \xrightarrow{L^1} u \cdot \varphi'$ $\quad u_k' \cdot \varphi \xrightarrow{L^1} v \cdot \varphi$

$\Downarrow$

$v = u'$ □.

ESEMPI

$\boxed{-\infty < a < b < +\infty}$

Ovviamente $W^{1,p}(a,b) \supseteq W^{1,\infty}(a,b) \supseteq C^1(a,b)$.

Esempio 1 $\quad u(x) = |x| \quad v(x) = \frac{x}{|x|} \quad u,v \in L^\infty$

$u' \stackrel{?}{=} v \quad \int_a^b (u \cdot \varphi' + v \cdot \varphi) = \int_a^0 -x\varphi' + (-1)\cdot\varphi + \int_0^b x\varphi' + 1\cdot\varphi$

$a<0<b \quad = -\int_a^0 (x\cdot\varphi)' + \int_0^b (x\varphi)' = -[x\varphi]_a^0 + [x\varphi]_0^b$

$= -0\cdot\cancel{\varphi(0)} + a\,\varphi\cancel{(a)} + b\,\varphi\cancel{(b)} - 0\cdot\cancel{\varphi(0)}$ $\square$

$u = |x| \in L^p, \; v \in L^p \quad \forall p \in [1,\infty]$ $\quad u \in W^{1,p}(a,b) \setminus C^1([a,b])$

$a<0<b$

Esempio 2 $\quad u(x) = \sqrt{x} \quad v(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad u : [0,b] \to \mathbb{R}$

$a=0<b$

$$\int_0^b \left(\sqrt{x}\,\varphi' + \frac{1}{2\sqrt{x}}\varphi\right) = \int_\varepsilon^b \left(\sqrt{x}\,\varphi' + \frac{1}{2\sqrt{x}}\varphi\right) = \int_\varepsilon^b (\sqrt{x}\,\varphi)'$$

$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \varphi = 0$ su $[0,\varepsilon]$

$\Rightarrow \varphi' = 0$ su $[0,\varepsilon]$

$= [\sqrt{x}\cdot\varphi(x)]_\varepsilon^b = \sqrt{b}\,\varphi\cancel{(b)} - \sqrt{\varepsilon}\,\varphi\cancel{(\varepsilon)} = 0$

$v = u'$

$u \in L^p \;\; \forall p \in [1,\infty]$

$v \in L^p \quad \int_0^b |v|^p = \int_0^b \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^p = \frac{1}{2^p}\int_0^b \frac{1}{x^{p/2}} < +\infty$

$\forall p \in [1,2) \quad \Updownarrow$

$\Rightarrow u \in W^{1,p} \quad 1 \le p < 2. \qquad p/2 < 1$ $\square$