ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 2 – 18.9.2024

Regole formali

$$\frac{\neg\neg P}{P}$$

(eliminazione $\neg$)

[per assurdo vale P

⋮

$\neg P$
]

$\neg P$ (introduzione $\neg$)

$P \Rightarrow Q$ implicazione "se P allora Q"

$P \Leftarrow Q$ significa $Q \Rightarrow P$ "P se Q"

$P \Leftrightarrow Q$ significa $(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Leftarrow Q)$ "P se e solo se Q"

Esercizio $P \Leftrightarrow Q$ vale se e solo se P e Q hanno lo stesso valore di verità

in formule

$$\boxed{(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)}$$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$	$P \wedge Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$	[illegible]
F	F	V	V	V	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	F	V	F	F	V
V	V	V	V	V	V	F	F	F	V	V

$P \Rightarrow Q$ è equivalente $\neg(P \wedge \neg Q)$

in python:
```
def implies(P, Q):
    return not (P and not Q)
```

→ Regole di de Morgan:

$$\neg(P \wedge Q) \iff (\neg P) \vee (\neg Q)$$

$$\neg(P \vee Q) \iff (\neg P) \wedge (\neg Q)$$

ES $\quad P \Rightarrow Q \iff \neg(P \wedge \neg Q) \iff \underbrace{\neg P \vee Q}$

→ implicazione contropositiva

$$P \Rightarrow Q \iff \neg Q \Rightarrow \neg P$$

Esercizio fare la verifica con le tabelle di verità.

Dimostrazione più umana:

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\neg P \vee Q)$$
$$\Updownarrow$$
$$(\neg Q \Rightarrow \neg P) \iff (Q \vee \neg P)$$

CALCOLO DEI PREDICATI

ES $\quad x = 2$ se al posto di x metto un numero il predicato diventa una proposizione (cioè è vera o falsa).

x è il nome di una "variabile"

ES $\quad x = y \qquad$ ES $\quad x = y - x$

QUANTIFICATORI

Se P è un predicato che dipende da x:

$\exists x : P(x)$ es: $\exists x : x = 2$

"esiste x tale che $P(x)$"

$\forall x : P(x)$ es: $\forall x : x = x$

quantificatore universale

quantificatore esistenziale

$P(x, y)$

x, y sono variabili libere

$\boxed{\forall x : P(x,y)}$

x viene chiusa

ottengo un predicato con una unica variabile libera: y

ES $\exists x : x^2 = y$ è un predicato che dipende solo da y.

x è una variabile "muta" chiusa dal quantificatore $\exists$.

$\forall y : \exists x : x^2 = y$ è una proposizione

Regole di inferenza

$$\frac{\forall x : P(x)}{P(c)}$$ c è una costante

$$\frac{P(c)}{\exists x : P(x)}$$

[Fissiamo x

⋮

$P(x)$

]

$\forall x : P(x)$

$\exists x : P(x)$

[Sia c tale che $P(c)$

⋮

$Q(c)$

]

$\exists x : Q(x)$

Regole di de Morgan:

$\neg \forall x : P(x)$ è equivalente $\exists x : \neg P(x)$

$\neg \exists x : P(x)$ " $\forall x : \neg P(x)$

ES $\neg \forall x \exists y \ P(x,y)$ è equivalente a:

$\exists x \forall y \neg P(x,y)$

Scambio dei quantificatori:

$\forall x \forall y \ P(x,y)$ è equivalente $\forall y \forall x \ P(x,y)$

$\exists x \exists y \ P(x,y)$ " $\exists y \exists x \ P(x,y)$

Ma

$\forall x \exists y \ P(x,y) \Leftarrow \exists y \forall x \ P(x,y)$

Es $\forall x \exists y : x = y$ $\exists y \forall x : x = y$

VERO FALSO

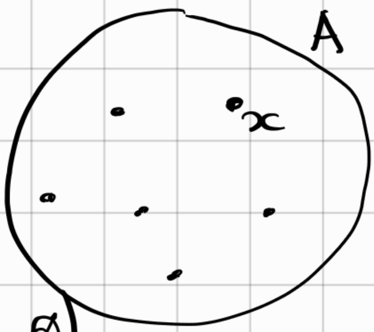
$$\left[\begin{array}{cc} \neg\forall x\,\exists y : x=y & \neg\exists y\,\forall x : x=y \\ \exists x\,\forall y : x\neq y & \forall y\,\exists x : x\neq y \\ \text{FALSO} & \text{VERO} \end{array}\right]$$

TEORIA degli INSIEMI

Gli oggetti del nostro universo saranno tutti insiemi.
x, A, 7 sono insiemi.

Un unico predicato: $\boxed{x \in A}$

Interpretazione:



Assioma (esistenza di $\emptyset$)

$$\exists y : \neg\exists x : x \in y$$

[Sia $\emptyset$ tale che: $\neg\exists x : x \in \emptyset$

⋮

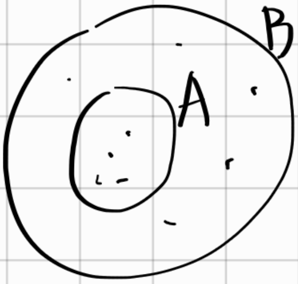
]

Relazioni:

$A \subseteq B$ significa $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$

$A \supseteq B$ " $\forall x : x \in A \Leftarrow x \in B$

$A = B$ " $\forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B$.



Teorema L'insieme $\emptyset$ è unico.

dim

Se $x\in A$ è sempre falso $\neg\exists x : x\in A$

$x\in B$ è sempre falso $\neg\exists x : x\in B$

$$\left.\begin{array}{l}\forall x : x\notin A\\ \forall x : x\in B\end{array}\right\} \Rightarrow \forall x \quad x\notin A \Leftrightarrow x\notin B$$

$$\forall x : x\in A \Leftrightarrow x\in B$$

$$A=B \qquad \square$$

$\forall x : x=x$

$$\forall x\,\forall y\,\forall z : x=y \wedge y=z \Rightarrow x=z.$$