ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 6 - 27.9.2024

$$S = 1+2+3+\ldots+100$$
$$S = 100+99+98+\ldots+1$$
$$2S = 101+101+\ldots+101 = 101\cdot 100$$
$$S = \frac{10100}{2} = 5050$$

$$\boxed{1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

cosa significano?

PRINCIPIO DI INDUZIONE

Se P è un predicato in una variabile $n\in\mathbb{N}$, $P(n)$

Se (i) $P(0)$ $\qquad 0\in\mathbb{N}$

(ii) $\forall n: \quad P(n) \Rightarrow P(\sigma(n))$

Allora $P(n)$ vale $\forall n\in\mathbb{N}$.

dim $A = \{n\in\mathbb{N} : P(n)\}$

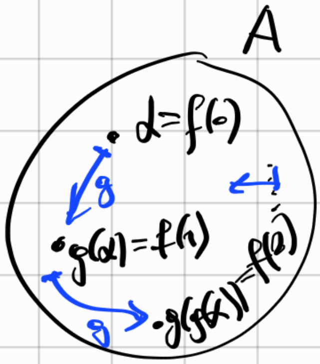
Ultimo assioma di Peano

$$\left.\begin{array}{l}(i) \Rightarrow 0\in A\\ (ii) \Rightarrow n\in A \Rightarrow \sigma(n)\in A\end{array}\right\} \Rightarrow A = \mathbb{N}$$
$$\Downarrow$$
$$\forall n\in\mathbb{N} : P(n) \quad \square$$

Teorema (definizioni per induzione, o ricorsione)

Sia A un insieme, $g: A \to A$, sia $\alpha \in A$.
Allora esiste una unica
$f: \mathbb{N} \to A$ tale che:

$$\begin{cases} f(0) = \alpha \\ f(\sigma(n)) \overset{(*)}{=} g(f(n)) \end{cases}$$



Si avrà:

$f(0) = \alpha$ $\qquad 0 \in \mathbb{N}$

$f(1) = f(\sigma(0)) = g(f(0)) = g(\alpha)$ $\qquad 1 = \sigma(0)$

$f(2) = f(\sigma(1)) = g(f(1)) = g(g(\alpha))$ $\qquad 2 = \sigma(1)$

$f(3) = \ldots\ldots\ldots = g(g(g(\alpha)))$ $\qquad 9 = \sigma(8)$

$\vdots$

$f(n) = \ldots\ldots = \underbrace{g(g(\ldots g}_{n \text{ volte } g}(n)\ldots)$

dim sugli appunti.

Def Una funzione $\underline{a}: \mathbb{N} \to A$ $\quad A$ insieme si chiama <u>successione</u>

$\underline{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ $\qquad a_n = \underline{a}(n)$

$= \{ 0 \mapsto a_0, 1 \mapsto a_1, 2 \mapsto a_2, \ldots, n \mapsto a_n, \ldots \}$

Le definizioni per induzione ci permettono di definire funzioni su $\mathbb{N}$ e anche operazioni.

Che cos'è una operazione? $a, b \in \mathbb{N}$ $\quad a+b \in \mathbb{N}$

$+(a,b)$

$$\begin{aligned} * : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (a,b) &\longmapsto a*b \end{aligned}$$

oppure: $* : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$a \longmapsto *a$

$*a : b \longmapsto a*b.$

$+3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$(+3)(6) = 9$

$3+6 = 9.$

Questioni che già sapete: uso delle parentesi
priorità delle operazioni

$$x+y\cdot z = x+(y\cdot z) \neq (x+y)\cdot z.$$

$$x*y*z = (x*y)*z$$

Addizione

$n+1 = \sigma(n)$

$$\begin{cases} n+0 = n \\ \underbrace{n+\sigma(m)} = \sigma(n+m) \end{cases}$$

$n+m = \underbrace{\sigma(\sigma\ldots(\sigma(n))\ldots)}_{m \text{ volte}}$

Moltiplicazione:

$$\begin{cases} n\cdot 0 = 0 \\ n\cdot(m+1) = n\cdot m + n \end{cases}$$ ✓

$n\cdot m = \underbrace{n+n+\ldots+n}_{m \text{ volte}}.$

Elevamento a potenza:

$$\begin{cases} n^0 = 1 \\ n^{m+1} = n^m \cdot n \end{cases}$$

⚠ Abbiamo definito $0^0 = 1$

$$n^m = \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \, n}_{m \text{ volte}}.$$

Teorema Valgono tutte le ben note proprietà di queste operazioni:

$$x + y = y + x \qquad (x+y)+z = x+(y+z)$$

$$x \cdot y = y \cdot x \qquad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

$$\vdots$$

$$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$\vdots$$

$$x^{y+z} = x^y \cdot x^z \qquad (x^y)^z = x^{y \cdot z}$$

$$\vdots$$

el. neutro $\quad x + 0 = x \qquad x \cdot 1 = x$

el. assorbente $\qquad x \cdot 0 = 0$

$$\vdots$$

$$\Sigma$$

FATTORIALE

$n! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}$

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = (n+1) \cdot n! \end{cases}$$

$0! = 1$
$1! = 1 \cdot 0! = 1$
$2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 = 2$
$3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
$5! = 5 \cdot 4! = 120$
$\vdots$

Es SEMI-FATTORIALE

$8!! = 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$
$7!! = 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$

$8!! = \frac{8!}{7!!}$

$$\begin{cases} 0!! = 1 \\ 1!! = 1 \\ (n+2)!! = (n+2) \cdot n!! \end{cases}$$

Esercizio
$(2n)!! = 2^n \cdot n!$

Varianti del principio di induzione:

$$\begin{cases} f(0) = \alpha \\ f(n+1) = g(f(n), f(n-1)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(0) = \alpha \\ f(n+1) = g(f(n), n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(n_0) = \alpha \\ f(n+1) = g(f(n)) \end{cases}$$

$f : \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\} \to A$

.....

Esercizio: $\boxed{(2n)!! = 2^n \cdot n!}$ $\xleftarrow{P(n)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

idea: $8!! = 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = (2\cdot 4)\cdot(2\cdot 3)\cdot(2\cdot 2)\cdot(2\cdot 1)$

$= 2^4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$= 2^4 \cdot 4!$

formalmente: si fa per induzione:

(i) $n=0$: $(2\cdot 0)!! = 0!! = 1$ (!)

$2^0 \cdot 0! = 1 \cdot 1 = 1$

(ii) $P(n) \overset{?}{\Longrightarrow} P(n+1)$ $\forall n$

Sia $n \in \mathbb{N}$ qualunque.

Supponiamo $P(n)$: ipotesi induttiva $\boxed{(2n)!! = 2^n \cdot n!}$

vale $P(n+1)$?

definizione!!

$$\boxed{(2(n+1))!!} = (2n+2)!! = (2n+2)(2n)!! =$$

$$\underset{P(n)}{=} (2n+2)\cdot 2^n \cdot n! = 2\cdot(n+1)\cdot 2^n \cdot n!$$

$$= 2^{n+1} \cdot (n+1)\cdot n! \underset{\text{def } n!}{=} \boxed{2^{n+1}(n+1)!}$$

$P(n+1)$: $\boxed{(2(n+1))!! = 2^{n+1}(n+1)!}$ □

Come definire $S_n = 1 + 2 + \dots + n$

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_{n+1} = \underbrace{S_n + (n+1)}_{} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} S_1 = S_0 + 1 = 1 \\ S_2 = S_1 + 2 = 1+2 \\ S_3 = S_2 + 3 = 1+2+3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} k}$$

In generale:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{0} a_k = 0 \\ \sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} \end{cases}$$

Esempi:

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

$$n^m = \prod_{k=1}^{m} n$$

$$n \cdot m = \sum_{k=1}^{m} n$$

$$\begin{cases} \prod_{k=1}^{0} a_k = 1 \\ \prod_{k=1}^{n+1} a_k = \prod_{k=1}^{n} a_k \cdot a_{n+1} \end{cases}$$

Esercizio
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

$$\begin{bmatrix} \text{Se } n = m \cdot k & \text{scriviamo: } \frac{n}{m} = k \\ \text{Se } n = m + k & \text{scriviamo } n - m = k \end{bmatrix}$$

svolgimento $P(n)$: $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k} = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$

Per induzione: (i) $P(0)$? $\sum_{k=1}^{0} k = 0$

$\frac{0\cdot(0+1)}{2} = \frac{0}{2} = 0$ sono uguali!

(ii) $P(n) \overset{?}{\Longrightarrow} P(n+1)$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n+1} k} \overset{def}{=} \boxed{\sum_{k=1}^{n} k} + (n+1) \overset{P(n)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$$

$$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \boxed{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$

$P(n+1)$: $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ $\square$

Quanto fa $\sum_{k=1}^{n} k^2 = ?$ $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = ?$

$$(k+1)^3 - k^3 = (k^3+3k^2+3k+1) - k^3$$
$$= 3k^2+3k+1$$

somma telescopica

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^3 - k^3\right] = (\cancel{2^3} - 1^3) + (\cancel{3^3} - \cancel{2^3}) + (\cancel{4^3} - \cancel{3^3}) + \cancel{\dots} + ((n+1)^3 - \cancel{n^3})$$

$$= (n+1)^3 - 1^3$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (3k^2+3k+1) = \sum_{k=1}^{n} 3k^2 + \sum_{k=1}^{n} 3k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} m = n \cdot m$$

$$= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)^3 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n}{3}$$

$$= \frac{2(n+1)^3 - 2 - 3n(n+1) - 2n}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2(n+1)^2 - 3n) - 2n - 2}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+4n+2-3n) - 2(n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+n+2-2)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+n)}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \square$$

Esercizio: Dimostrare che $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ per induzione

Gauss^2: $1+4+9+16+\ldots+10000 = \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6}$