ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 7 - 30.9.2024

test settimanale es. 12

$f(n) = 2^n \cdot n!$

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(n+1) = \underbrace{g(n, \underbrace{f(n)}_{})}_{} \end{cases}$$

$$f(n+1) = 2^{n+1} \cdot (n+1)!$$
$$= 2 \cdot 2^n (n+1) \cdot n!$$
$$= \underbrace{2(n+1)}_{} \cdot f(n) = g(n, f(n))$$

$$g(n, k) = (2n+2) \cdot k$$

test settimanale n. 13

$$\sum_{k=1}^{2n} \underbrace{2k}_{} = \underbrace{\overset{k=1}{2} + \overset{k=2}{4} + \overset{k=3}{6} + \overset{\dots}{\dots} + \overset{k=2n}{4n}}_{2n \text{ addendi}}$$

progressione aritmetica:

$$f(k) = m \cdot k + q$$

$$f(k+1) - f(k) = m(k+1) + q - (mk + q) = m$$

Teorema

$$\sum_{k=n_0}^{n_1}(m\cdot k+q) = \frac{m\cdot n_1+q+m\cdot n_0+q}{2}\cdot(n_1-n_0+1)$$

dim per induzione $\square$

$$\sum_{k=1}^{2n} 2k = \frac{4n+2}{2}\cdot 2n = 4n^2+2n$$

$\square$

Oppure ci riconduciamo a

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\sum_{k=1}^{2n} 2k = 2\sum_{k=1}^{2n} k = 2\cdot\frac{2n(2n+1)}{2} = 4n^2+2n.$$

Esercizio $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(k^2+2k+3) = ?$

ricordando che: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$= \sum_{k=2}^{n} k^2 + 2\sum_{k=2}^{n} k + \sum_{k=2}^{n} 3$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 - 1 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} k - 1\right) + \sum_{k=2}^{n} 3$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 + 2\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) + 3(n-1)$$

$$\frac{2n^3+3n^2+n}{6} - 1 + 2\left(\frac{n(n+1)-2}{2}\right) + 3(n-1)$$

$$= \frac{2n^3+3n^2+n-6+6n^2+6n-12+18(n-1)}{6}$$

$$= \frac{2n^3+9n^2+25n-36}{6}$$

Esercizio

$$\sum_{k=10}^{20} k^2 = \sum_{k=1}^{20} k^2 - \sum_{k=1}^{9} k^2 = \frac{20\cdot 21\cdot 41}{6} - \frac{9\cdot 10\cdot 19}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Sigma$$

Insiemi numerici

Abbiamo definito $\mathbb{N}$ (esiste ed è "unico" $\mathbb{N}$ che soddisfa gli assiomi di Peano)

ISOMORFISMO

$(N_1, \sigma_1) \quad (N_2, \sigma_2)$

$$\begin{tikzcd} N_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\sigma_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N_2 \arrow[d, "\sigma_2"] \\ N_1 \arrow[r, "\varphi"] & N_2 \end{tikzcd}$$

$x \mapsto \varphi(x)$, $\quad \sigma_2(\varphi(x))$

$\sigma_1 x \mapsto \varphi(\sigma_1(x)) =$

$$\varphi \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ \varphi$$

La sottrazione su $\mathbb{N}$ non è definita su tutto $\mathbb{N}$

Estendiamo $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ aggiungendo i numeri negativi. $n-m$

ES $\quad (n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \quad (n,n)$

$$(n_1,m_1) \sim (n_2,m_2)$$
$$\Updownarrow$$
$$n_1+m_2 = n_2+m_1 \qquad n_1-m_1 = n_2-m_2$$

-3

$$(7,10) \sim (10,13)$$

$\mathbb{Z} = \mathbb{N}\times\mathbb{N}/_\sim \qquad \sim$ è una relazione di equivalenza.

$$-3 = \{(7,10),(10,13),\dots\}$$
$$= \{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : (n,m)\sim(0,3)\}$$
$$= [(0,3)]_\sim$$

$3 = \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (n,m) \sim (3,0)\}$

$\mathbb{N}$ è un "monoide" sia additivo che moltiplicativo.

MONOIDE

(una operazione $*$ associativa e c'è elemento neutro)

$\mathbb{Z}$ è un gruppo additivo (abeliano)

(è anche un anello con unità)

GRUPPO

G insieme con una operazione $*$

- associativa $(x*y)*z = x*(y*z)$
- elemento neutro: $e \in G$ $e*x = x*e = x$
- inverso: $\forall x \in G$ $\exists y \in G$ $x*y = y*x = e$.

---

se $x*y = y*x$ diciamo che il gruppo è abeliano (o commutativo)

Su $\mathbb{Z}$ non è definita la divisione. $\frac{10}{-5} = -2$

estendo la divisione: $\frac{p}{q} = (p,q)$ con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$.

$$\frac{p_1}{q_1} \sim \frac{p_2}{q_2} \iff p_1 q_2 = q_1 p_2.$$

FRAZIONI

$$\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) / \sim \; = \mathbb{Q}$$

$$\frac{5}{10} \sim \frac{1}{2}$$

$\mathbb{Q}$ è un CAMPO.

Def K insieme con due operazioni: $+$ (addizione) $\cdot$ (moltiplicazione) è un CAMPO se valgono le seguenti proprietà:

- K è un gruppo additivo abeliano
  - $+$
  - associativa
  - neutro 0
  - opposto $-x$
  - commutativa
- $K \setminus \{0\}$ è un gruppo moltiplicativo abeliano
  - $\cdot$
  - associativo
  - neutro 1
  - reciproco $\frac{1}{x}$ o x^{-1}
  - commutativo.
- distributiva $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$
- $1 \neq 0$

Proprietà di un campo.

- l'inverso è unico (vale nei gruppi)

$$y \cdot x = x \cdot y = 1$$
$$z \cdot x = x \cdot z = 1$$

$$z \cdot x \cdot y = 1 \cdot y = y$$
$$\shortparallel$$
$$z \cdot 1 = z \cdot 1 = z$$

- $x \cdot 0 = 0$
- $-x = x \cdot (-1)$

$$-x \cdot y = (-x) \cdot y$$
$$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$$

- $(x+y)\cdot(x-y) = x\cdot x - y\cdot y = x^2 - y^2$

$$x^n = \underbrace{x\cdot x \cdots x}_{n}$$

- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

⋮

Si definisce $x-y = x+(-y)$

se $y \neq 0$: $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$

$\boxed{\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2}$

Teorema (Pitagora) Non esiste $x \in \mathbb{Q}$: $x^2 = 2$.

dim Per assurdo sia $x \in \mathbb{Q}$ tale che $x^2 = 2$.

$x = \frac{p}{q}$ $\quad p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ $\qquad p = k\cdot p'$, $q = k \cdot q'$

supponiamo che $\frac{p}{q}$ sia ridotta ai minimi termini.

(p e q non hanno fattori in comune)

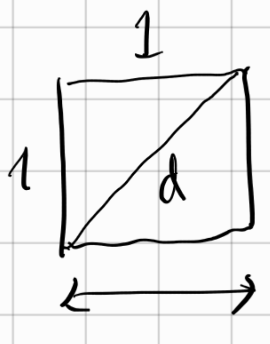
$x^2 = 2$ $\qquad \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ $\qquad p^2 = 2q^2$ $\qquad p^2$ è pari $\Downarrow$ p è pari

$(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$

$p = 2p'$ $\qquad p^2 = 4(p')^2$ $\qquad 4(p')^2 = 2q^2$

$2(p')^2 = q^2 \Rightarrow q^2$ è pari $\Downarrow$ q è pari

ASSURDO $\square$



$1^2 + 1^2 = d^2$

$2 = d^2$

Nota

Se $\sim$ è una relazione di equivalenza su A

$$A/_{\sim} = \{ [x]_{\sim} : x \in A \}$$

$$[x]_{\sim} = \{ y \in A : x \sim y \}$$

ES $\mathbb{Z}$ $n \sim m$ se $n-m$ è pari.

$$\mathbb{Z}/_{\sim} = \{ [x]_{\sim} : x \in \mathbb{Z} \} = \{ \underbrace{[0]_{\sim}}_{\text{pari}} , \underbrace{[1]_{\sim}}_{\text{dispari}} \}$$

$$= \{ 2\mathbb{Z} , 2\mathbb{Z}+1 \}$$