ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 9 - 4.10.2024

Es 8 $\quad \forall n \geq 4 \quad 2^n \geq n^2$

Verifico per induzione

* $n=4$: $\quad 2^4 \geq 4^2 \longrightarrow 16 \geq 16$ Ok! (prop. riflessiva)

* Vale n, vale $n+1$?

$$2^{n+1} \geq (n+1)^2 = n^2+2n+1$$
$$\parallel$$
$$2^n \cdot 2 \geq n^2+2n+1$$
$$\parallel$$
$$2^n + 2^n \geq n^2 + 2n+1$$

poiché vale $2^n \geq n^2$ posso toglierlo

$2^n \geq 2n+1$ questo vale? Vediamo per induzione

* $n=4 \longrightarrow 2^4 \geq 2 \cdot 4 + 1 = 8+1 = 9$ Ok!
* n vale $\longrightarrow n+1$? $\quad 2^{n+1} \geq 2(n+1)+1$

$$2^n + 2^n \geq 2n+2+1$$
$$2^n + 2^n \geq 2n+1+2$$

So per Hp. induttiva che $2^n \geq 2n+1$

$2^n \geq 2$ questo è vero per $n \geq 1$, e noi partiamo da $n=4$ quindi Ok.

$\square$

ORDINAMENTO CONTINUO

(Abbiamo in mente $\mathbb{R}$)

- maggiorante / minorante
- max / min
- sup / inf

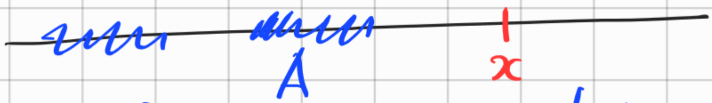
<u>Teorema</u> (esistenza di sup e inf)

<u>Sia</u> $A \subseteq R$ ($R = \mathbb{R}$ è quello che ci interessa) dove R ha un ordinamento continuo $\leq$.

Se $A \neq \emptyset$ e A ha almeno un maggiorante allora $\sup A$ esiste.

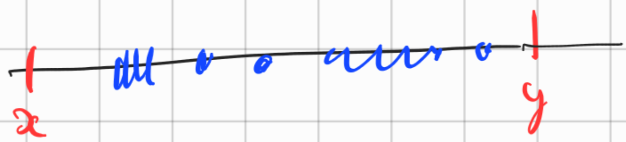
Se $A \neq \emptyset$ e A ha almeno un minorante allora $\exists \inf A$

<u>Def</u> A si dice **superiormente limitato** se ha almeno un maggiorante

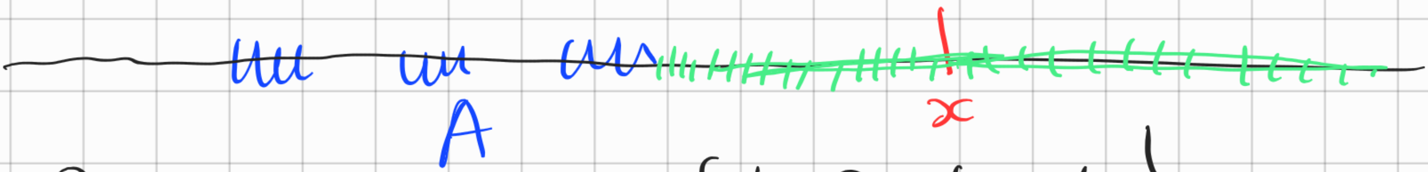


A si dice **inferiormente limitato** se ha almeno un minorante

A si dice **limitato** se è sia superiormente che inferiormente limitato



<u>dim</u> ($\exists$ sup)



$\exists\, x \geq A$. $\quad B = \{ b \in R : b \geq A \}$

↑ maggiorante $\quad$ ↑ maggioranti

$A \neq \emptyset$ per ipotesi

$B \neq \emptyset \Leftarrow x \in B$ per ipotesi

$A \leq B$ per definizione di B

Continuità $\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R} \quad A \leq c \leq B$

$c \geq A \Rightarrow c \in B$

$c \leq B \Rightarrow c = \min B$

$\Downarrow$

$c = \sup A.$ $\square$

ES $\quad A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$

$\exists \sup A \in \mathbb{R} \qquad \sup A = 1$

$\exists \inf A \in \mathbb{R} \qquad \inf A = 0$

ES $\quad A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

A non è superiormente limitato.

Perché se fosse $A \leq m \quad m > 0$

$m \in A$

$m + 1 \in A$

$m < m+1$. assurdo

$\{\text{maggioranti di } A\} = \emptyset$

$\nexists \min \emptyset$ $\qquad$ $\nexists \sup A$ in $\mathbb{R}$.

A è inferiormente limitato $(0 \leq A)$

$\exists \inf A \in \mathbb{R}$. $\qquad$ $\inf A = 0$.

$(\nexists \min A)$.

$x > 0$ $\qquad$ $0 < \frac{x}{2} < x$ $\Rightarrow$ non $(x \leq A)$

<u>Teorema</u> $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ non è superiormente limitato.

<u>dim</u> Per assurdo se $\mathbb{N}$ fosse superiormente limitato
$\exists\ S = \sup \mathbb{N}$, $S \in \mathbb{R}$. $\qquad$ $S \geq \mathbb{N}$

è il minimo

$S-1$ non è un maggiorante di $\mathbb{N}$

$\exists\ n \in \mathbb{N}$ t.c. $n > S-1$

$n+1 > S$

mentre S è un maggiorante!

$\mathbb{N}$ non è superiormente limitato.

<u>Teorema</u> (proprietà archimedea) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x > 0, y > 0$

$\exists\ n \in \mathbb{N}$ tale che $\qquad$ $nx \geq y$.

$$\downarrow$$

$$\underbrace{x + x + x \dots + x}_{n}$$

dim $A = \{ nx : n \in \mathbb{N} \}$

$B = \{ y \in \mathbb{R} : y \geq A \}$

per assurdo $B \neq \emptyset$ $\exists\, s = \sup A$, $s \in \mathbb{R}$

$s - x$ non è un maggiorante di A

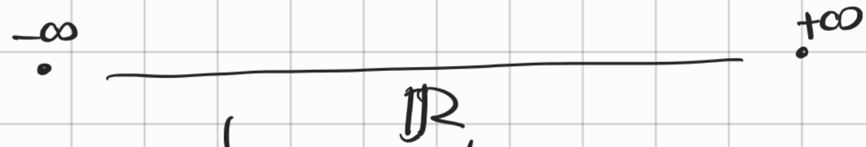
$\exists n \in \mathbb{N}$ $s - x < nx$

$s < (n+1)x \in A$.

neanche s è un maggiorante

Consideriamo una estensione dei numeri reali:

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$



estendiamo l'ordinamento ponendo:

$-\infty \leq \underbrace{x \leq +\infty}$ $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}$ (definizione)

$+\infty = \max \overline{\mathbb{R}}$ $-\infty = \min \overline{\mathbb{R}}$.

$\overline{\mathbb{R}}$ è limitato! (in sé stesso).

$\Rightarrow$ su $\overline{\mathbb{R}}$ sup e inf esistono per ogni insieme $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$

se $A \neq \emptyset$ per il teorema

[se $A \subseteq \mathbb{R}$ non è superiormente limitato in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \{\text{maggioranti di } A \text{ in } \overline{\mathbb{R}}\} = \{+\infty\}$

$\sup A = +\infty$ (se A non è superiormente limitato in $\mathbb{R}$).

[Se $A \subseteq \mathbb{R}$ non è inferiormente limitato

$\Rightarrow \inf A = -\infty$].

Se $A = \emptyset$? $B = \{\text{maggioranti di } \emptyset\} = \overline{\mathbb{R}}$

$\min B = -\infty$

$\sup \emptyset = -\infty$

Analogamente $\inf \emptyset = +\infty$.

Per ogni $A \subseteq \mathbb{R}$ (o $\overline{\mathbb{R}}$) esistono $\sup A \in \overline{\mathbb{R}}$
$\inf A \in \overline{\mathbb{R}}$

$\sup A = +\infty \iff A$ non è superiormente limitato (in $\mathbb{R}$)
($\inf A = -\infty$) (inferiormente)

UNICITA' di $\mathbb{R}$

Teorema (isomorfismo) Siano R e S gruppi additivi ordinati con un ordinamento denso e continuo.

Allora fissato $u \in R$, $u>0$ fissato $v \in S$, $v>0$

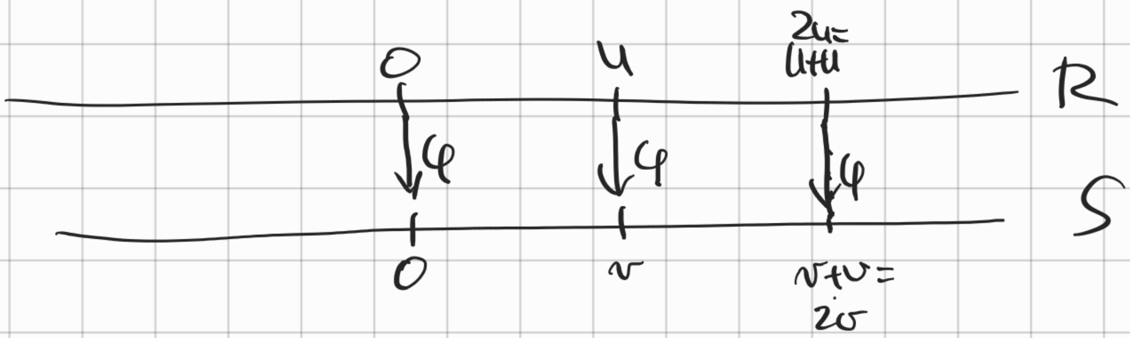
$$\exists! \quad \varphi : R \to S$$

tale che:

(i) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ (omomorfismo)

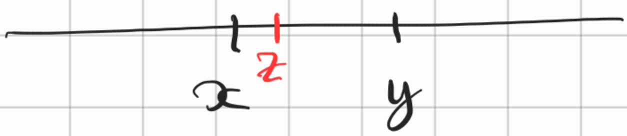
(ii) $\varphi(u) = v$

(iii) $x \leq y \iff \varphi(x) \leq \varphi(y)$



Def Un ordinamento su R si dice **denso** se

$\forall\, x,y \in R$ se $x<y$ $\exists\, z \in R$ t.c. $x<z<y$.



(Se R è un campo ordinato, continuo $\Rightarrow$ è denso)

$$x < \frac{x+y}{2} < y$$

($\mathbb{Z}$ non è denso ma è un gruppo additivo e formalmente è anche "continuo")

$\mathbb{Q}$ è denso ma non continuo.

<u>Esercizio</u> $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ (significa che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ se $x < y$ $\exists z \in \mathbb{Q}$ tale che $x < z < y$.

(discende dalla proprietà Archimedea: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ (ovvero $n\varepsilon \geq 1$))

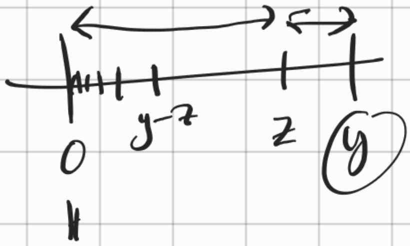
---

passi della dimostrazione teo. isomorfismo

(1) <u>Divisibilità</u>: 

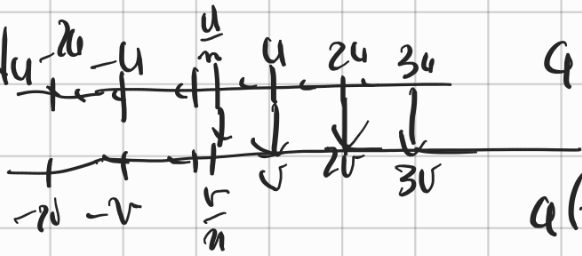
$\forall y \in \mathbb{R}, y > 0$ $\quad \forall n \in \mathbb{R}$ $\quad \exists x \in \mathbb{R}$ t.c. $x \cdot n = y$

$\exists \frac{y}{n}$.



$\frac{y}{n} = \sup \{ x : nx \leq y \}$

(2) Si definisce φ su $\mathbb{N}u$



$\varphi(nu) = nv$

poi su $\mathbb{Z}u$ $\quad \varphi(-nu) = -nv$

poi su $\mathbb{Q}u$ $\quad \varphi\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{v}{n}$

$\varphi\left(p \frac{u}{q}\right) = p \frac{v}{q}$

infine definisco φ su tutto R :

$$x \in R$$

$$A \leq x \leq B$$

$$\frac{p}{q} u$$

$$\underbrace{\varphi(A) \leq \varphi(x) \leq \varphi(B)}$$

$\varphi(x)$ è l'unico elemento di separazione tra $\varphi(A)$ e $\varphi(B)$ $\square$