ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 10 - 7.10.2024

Teorema [di isomorfismo] R, S gruppi ordinati, densi, continui.
→ l'ordinamento è invariante per traslazione

$(R, e_R, *_R, \leq_R)$
$(S, e_S, *_S, \leq_S)$

Fissato $u \in R$ $\quad u >_R e_R$

Fissato $v \in S$ $\quad v \geq_S e_S$

$\exists!\ \varphi : R \to S$ tale che:

(i) $\varphi(u) = v$
(ii) $\varphi(x *_R y) = \varphi(x) *_S \varphi(y)$
(iii) $x \geq_R e_R \Rightarrow \varphi(x) \geq_S e_S$

inoltre:
- $\varphi(e_R) = e_S$
- $x \geq_R y \Rightarrow \varphi(x) \geq_S \varphi(y)$
- se $v \neq e_R \Rightarrow \varphi$ è bigettiva
- $\varphi(x) *_S \varphi(y) = \varphi(y) *_S \varphi(x)$.

---

dim (sugli appunti, idea vista la lezione scorsa)

$$\varphi(e_R) = e_S$$

$$\varphi(e_R) = \varphi(e_R *_R e_R) \overset{(ii)}{=} \varphi(e_R) *_S \varphi(e_R)$$

$$\bullet\ \left[\begin{array}{l} x = \varphi(e_R) \ , \quad x \in S \quad\quad x = x *_S x \\ \quad\quad\quad\quad \exists \tilde{x} \quad e_S = x * \tilde{x} = x *_S \underbrace{(x *_S \tilde{x})}_{e_S} \\ e_S = x * e_S = x \end{array}\right]$$

MOLTIPLICAZIONE

$\mathbb{R}$ gruppo additivo ordinato, chiuso, continuo $\quad \mathbb{R}, +, 0, \leq$

Fissiamo $1 \in \mathbb{R}$, $1 > 0$. $\quad u = 1$

Dato $m \in \mathbb{R}$, $\boxed{m \geq 0}$ $\quad v = m$

$S = \mathbb{R}$

$0 \quad 1 \quad m$

$\exists! \varphi_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $\begin{cases} \varphi_m(1) = m \\ \varphi_m(x+y) = \varphi_m(x) + \varphi_m(y) \\ x \leq y \Rightarrow \varphi_m(x) \leq \varphi_m(y) \end{cases}$

definisco

$m \cdot x = \varphi_m(x)$

$$\begin{array}{l} m \cdot 1 = m \\ m \cdot (x+y) = m \cdot x + m \cdot y \\ x \leq y \Rightarrow m x \leq m y \end{array}$$

Se $m < 0$, $-m > 0$ $\quad m \cdot x = -(-m) \cdot x$

$\exists$ inverso? dato $x \in \mathbb{R}$ $x \neq 0$ $(x > 0)$

$\exists ?\ m$ t.c. $\underbrace{m \cdot x}_{\varphi_x(m)} = 1$.

φ_x è bijettiva ok

$(\mathbb{R}, 0, +, \leq, 1, \cdot)$ è un campo ordinato continuo (quindi denso)

La moltiplicazione è univocamente determinata dalla struttura di gruppo ordinato e dalla scelta dell'1.

$\mathbb{R}$ è unico sia come $\begin{cases} \text{gruppo ordinato denso continuo} \\ \text{campo ordinato continuo} \end{cases}$

Valore assoluto

$x \in \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

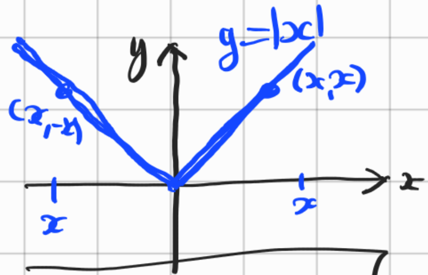
$|7| = 7$

$|-7| = 7$

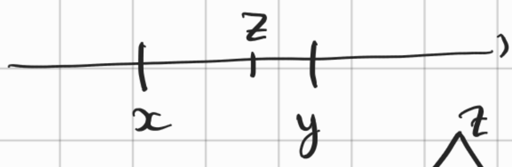
Proprietà:

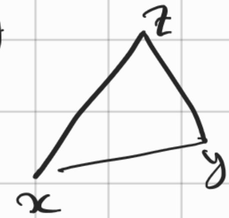
- $|x| \geq 0$
- (idempotenti) $||x|| = |x|$
- $|-x| = |x|$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- (convessità) $|x+y| \leq |x| + |y|$
- (disug. triangolare) $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$

$|x-y|$: distanza fra x e y



f è pari se $f(-x) = f(x)$



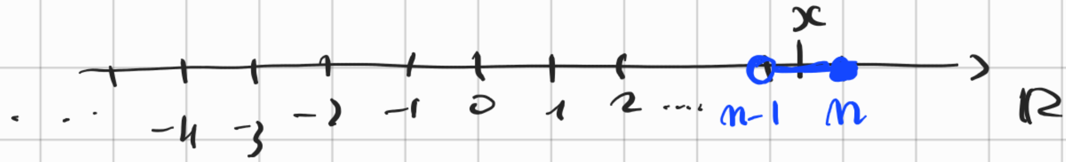


Proprietà:

$$|x-y| \leq r \iff x-r \leq y \leq x+r$$

Parte intera

Teorema dato $x \in \mathbb{R}$ $\exists!\, n \in \mathbb{Z}$ t.c. $n-1 < x \leq n$



Def

$\lfloor x \rfloor$ è l'unico $m \in \mathbb{Z}$ tale che

$$x-1 < m \leq x$$

$\lfloor x \rfloor$ è il più grande $m \in \mathbb{Z}$ tale che $m \leq x$.

$\lceil x \rceil$ è il più piccolo $m \in \mathbb{Z}$ tale che $m \geq x$.

ES $\left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 1$ $\qquad$ $\left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil = 2$

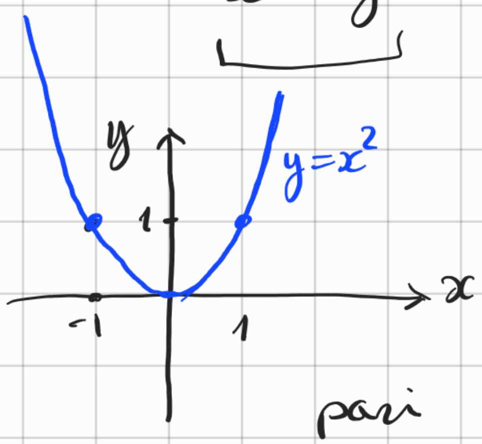
$\lfloor 1.5 \rfloor = 1$ $\qquad$ $\lfloor -1{,}5 \rfloor = -2$

RADICE n-esima

Fissato $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, fissato $y \in \mathbb{R}$ vorrei

$$\underbrace{x^n = y}$$

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n\text{-volte}} = \prod_{k=1}^{n} x.$$



$x^2 = x \cdot x$ $\quad > 0$ se $x > 0$

$\qquad\qquad > 0$ se $x < 0$

$\qquad\qquad = 0$ se $x = 0$

pari $\qquad (-x)^2 = (-1 \cdot x)^2 = (-1)^2 \cdot x^2 = 1 \cdot x^2$

$$= x^2$$

se $0 < x_1 < x_2$ $\qquad x_1^2 < x_2^2$

$x^2 = y$ $\begin{cases} \text{• non ha soluzione se } y<0 \\ \text{• ha una unica soluzione } x=0 \text{ se } y=0. \\ \text{• ha due soluzioni opposte se } y>0 \end{cases}$

Teorema (radice n-esima) Dato $y>0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$

$\exists!$ $x>0$ tale che $x^n = y$.

dim

$R = \{x \in \mathbb{R} : x>0\}$ $*_R = \cdot$ moltiplicazione

$e_R = 1$

$(R, 1, \cdot, \leq)$ è un gruppo ordinato

è denso e continuo

la divisibilità diventa

$\left[x, n \mapsto \frac{x}{n} \right]$ $\left[x, n \mapsto \sqrt[n]{x} \right]$

$n \cdot x = x + \ldots + x$ $x^n = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}$

Se n pari $(-x)^n = x^n$ $(-1)^n = 1$

Se n dispari $(-x)^n = -x^n$ $(-1)^n = -1$

$x^n = y$

se n pari $\begin{cases} \text{non ha soluzione se } y<0 \\ \text{ha una unica sol. } x=0 \text{ se } y=0 \\ \text{ha 2 soluzioni } x, -x \text{ se } y>0 \end{cases}$

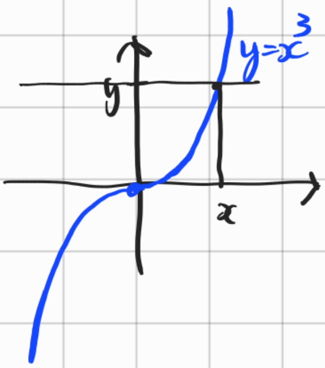
se n dispari

ha una unica soluzione x

($x>0$ se $y>0$

$x=0$ se $y=0$

$x<0$ se $y<0$)



Definizione: $y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$

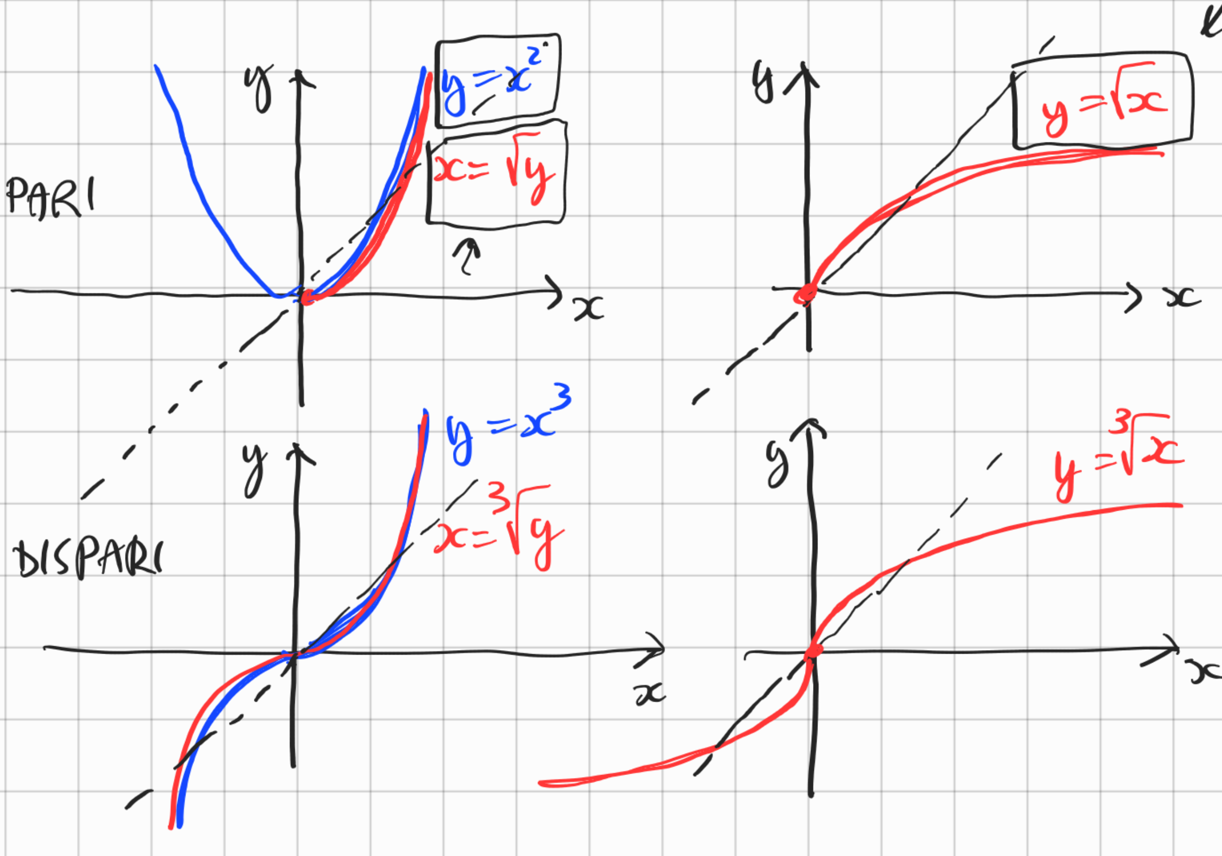
$\sqrt[n]{y}$ =
- se n pari: è definita solo per $y \geq 0$ come l'unica soluzione non negativa di $x^n = y$
- se n dispari: è definita $\forall y \in \mathbb{R}$ come l'unica soluzione di $x^n = y$.

$\sqrt{y} = \sqrt[2]{y}$.

$\sqrt{4} = 2$ ← sol. non negativa di $x^2 = 4$

$\sqrt{-4}$ non è definito

$\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{-8} = -2$



f è PARI se $f(-x) = f(x)$ es. x^n n pari

f è DISPARI se $f(-x) = -f(x)$. es x^n n dispari

es $\sqrt[n]{x}$ "

FUNZIONI LINEARI

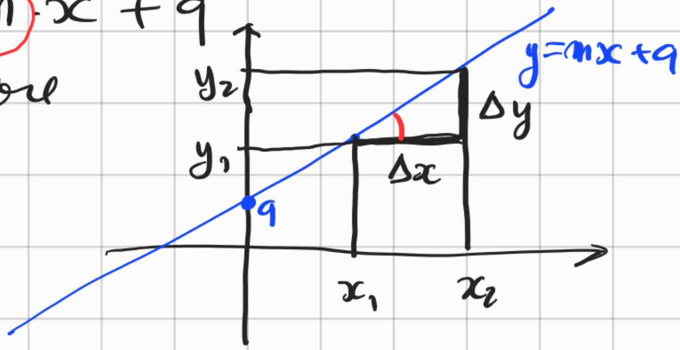
Se $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$

coefficiente angolare

intercetta

$$f(x) = m \cdot x + q$$

è una funzione lineare



Rapporto incrementale: $\text{"}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\text{"} = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

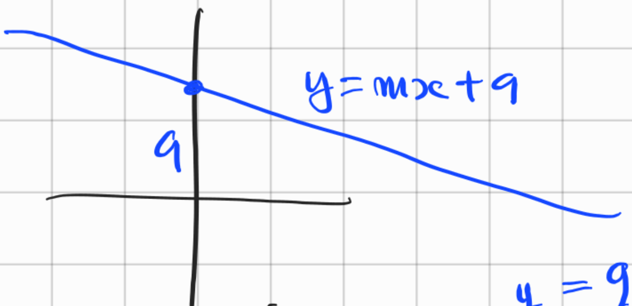
Se $f(x)=mx+q$ $\quad (x_2 \neq x_1)$ $\quad$ pendenza

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{(m x_2 + \cancel{q}) - (m x_1 + \cancel{q})}{x_2 - x_1} = \frac{m\cancel{(x_2-x_1)}}{\cancel{x_2-x_1}} = m.$$

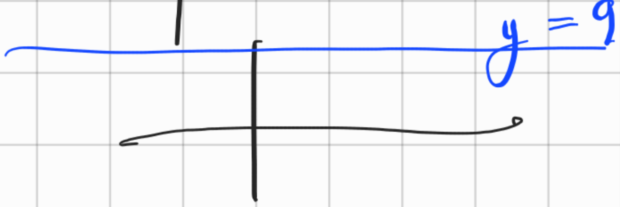
Salita pericolosa

pendenza 20 % $\qquad m = \dfrac{20}{100}$

$m<0$



$m=0$



$m>0$ f è strettamente crescente

$m<0$ f è strett. decrescente

$m=0$ f è costante

Definizione Diremo che f:

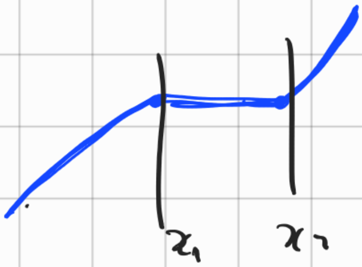
- è crescente se $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- è decrescente se $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
- è strett. crescente se $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- è strett. decrescente se $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$
- è monotona se è crescente o decrescente
- è strett. monotona se è strett cr. o strett. decrescente
- è costante se è crescente e decrescente

$$[\ \forall x, y \qquad f(x) = f(y)\ ]$$

---

f strett. monotona $\Rightarrow$ f è iniettiva.

se f è monotona ma non strettamente monotona



esistono $x_1 < x_2$

tali che se $x_1 \leq x \leq x_2$ $\qquad f(x) = f(x_1) = f(x_2)$.