ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 11 - 9.10.2024

Funzioni elementari: $|x|$, $\lfloor x \rfloor$, $\sqrt[n]{x}$, $mx+q$

Funzioni quadratiche:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0$$

idea: completamento del quadrato

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c} \longrightarrow \boxed{Y = aX^2}$$

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

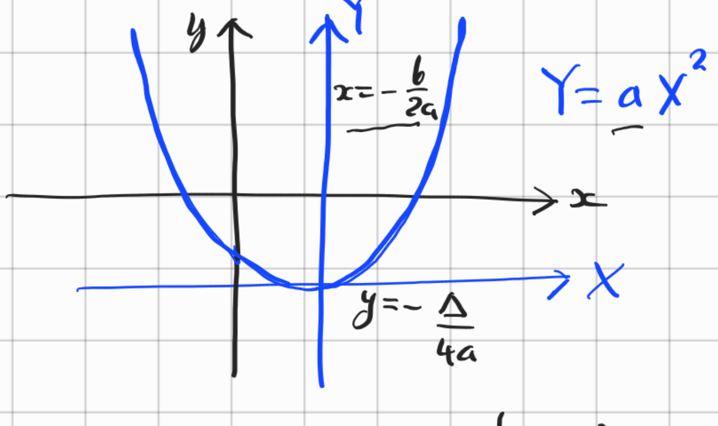
$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

y_0

$$\underbrace{y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}}_{Y} = a\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)}_{X}^2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$



Esercizio: esiste α t.c. l'equazione diventa: $\frac{Y}{\alpha} = \left(\frac{X}{\alpha}\right)^2$.

(cioè $y=ax^2+bx+c$ è simile (nel senso geometrico) a $y=x^2$)

FORMULA RISOLUTIVA: trovare x t.c. $ax^2+bx+c=0$

$$\cancel{y}+\frac{b^2-4ac}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\Uparrow$$

discriminante

$$\frac{\Delta}{4a^2}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

Se $\Delta<0$ non ci sono soluzioni

Se $\Delta=0$ c'è una unica soluzione:

$$x=-\frac{b}{2a}$$

Se $\Delta>0$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_{12}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}$$

FUNZIONI ESPONENZIALI a^x

Osservazione: $\mathbb{R}_+ = \{ x \in \mathbb{R} : x > 0 \}$

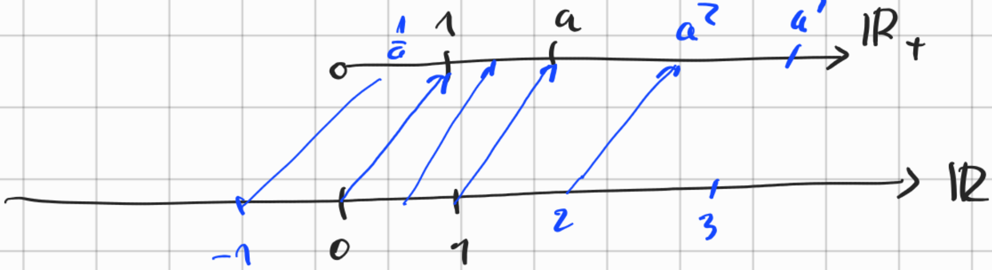
$(\mathbb{R}_+, \cdot, 1, \leq)$ è un gruppo totalmente ordinato, denso, continuo.

Fissato $a > 0$ $\exists !\ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tale che

$$\begin{cases} \varphi(x+y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) \\ \varphi(1) = a \\ \varphi \text{ è monotona} \end{cases}$$

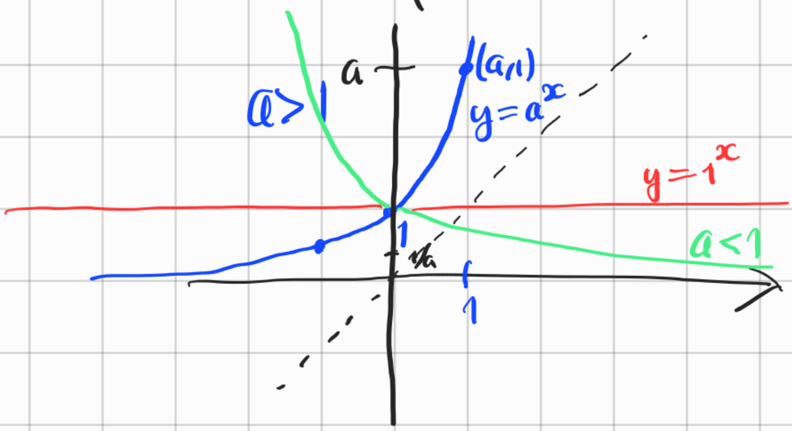
φ è monotona: str. crescente se $a > 1$; costante se $a = 1$; str. decrescente se $a < 1$

inoltre $\varphi(0) = 1$



$a^x = \varphi(x)$.

$$\left.\begin{aligned} a^{x+y} &= a^x \cdot a^y \\ a^1 &= a \end{aligned}\right]$$



$$\boxed{\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^{-1} &= \frac{1}{a} \\ (a \cdot b)^x &= a^x \cdot b^x \\ (a^x)^y &= a^{xy} \end{aligned}}$$

Per esempio dimostriamo: $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

$$\varphi(x) = a^x \cdot b^x$$

basta mostrare che

$$\begin{cases} \varphi(x+y) = \varphi(x)\cdot\varphi(y) \\ \varphi(1) = a\cdot b \\ \varphi \text{ è monotona.} \end{cases}$$

unicità nel teorema di isomorfismo

$$\Rightarrow \quad \varphi(x) = (a\cdot b)^x.$$

$$\varphi(x+y) = a^{x+y}\cdot b^{x+y} = a^x a^y b^x b^y$$

$$= a^x b^x a^y b^y = \varphi(x)\cdot\varphi(y)$$

$$\varphi(1) = a^1 \cdot b^1 = a\cdot b$$

se $a>1$, $b>1$ $\quad a^x$ crescente, b^x crescente

$$\Rightarrow a^x b^x \text{ è crescente.}$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x} = a^{-x} \quad \ldots\ldots$$

se $a<1$ mi riconduco a $\frac{1}{a}>1$

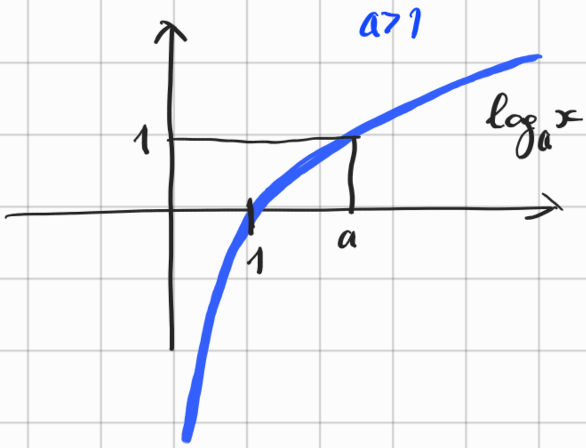
$$\varphi(x) = a^x$$

$$\mathbb{R} \underset{\varphi^{-1}}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}_+$$

se $a \neq 1$, $a>0$, φ è bigettiva $\Rightarrow$ invertibile

$$\log_a x = \varphi^{-1}(x)$$

$$\begin{cases} \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \\ \log_a a = 1 \\ \log_a x \text{ è monotona.} \end{cases}$$



$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

$$a^{\log_a x} = x \qquad (x>0)$$

$$\log_a a^x = x$$

$$\begin{cases} \log_a 1 = 0 \\ \log_a (b^x) = x \log_a b \\ \log_a x = \dfrac{\log_c x}{\log_c a} \end{cases}$$

POTENZA $\quad x^\alpha$

Se $x>0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ è definito come l'esponenziale.

Se $n \in \mathbb{N}$ x^n era già definito come moltiplicazione ripetuta:

$$x^n = \prod_{k=1}^{n} x = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ volte}}$$

Se $\alpha = n \in \mathbb{N}$ x^α coincide con x^n.

se $n \in \mathbb{N}$, $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ (perché: $\underbrace{x^{n-n}}_{=1} = x^n \cdot x^{-n}$)

se $\alpha = \dfrac{1}{n}$ $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ (perché: $(x^{\frac{1}{n}})^n = x^1 = x$)

Se $\alpha = \frac{p}{q}$ $\qquad x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} \qquad \left(x^{\frac{p}{q}} = \left(x^p\right)^{\frac{1}{q}} \right)$

$(x>0)$.

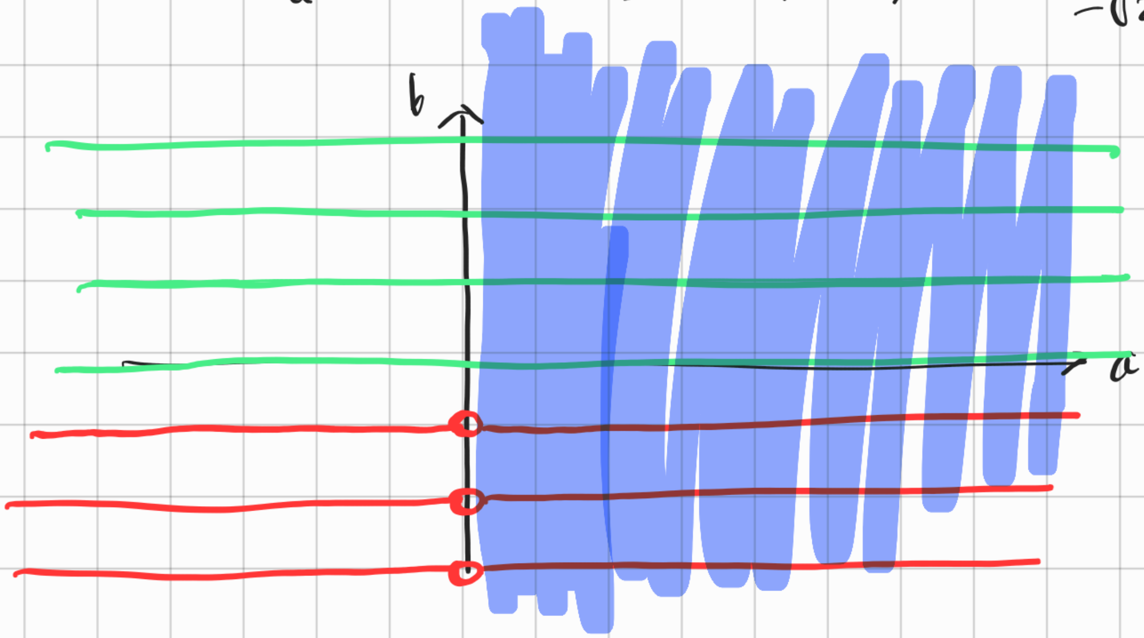
es: $2^{\sqrt{2}}$

- a^b è definita come esponenziale se $a>0$, $b \in \mathbb{R}$

es: $(-1)^n$

- a^b è definita come prodotto ripetuto se $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{N}$.
- a^b è anche definita se $a \neq 0$, $b \in \mathbb{Z}$.

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\qquad$ Es $\quad (-\sqrt{2})^{-1} = \frac{1}{-\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



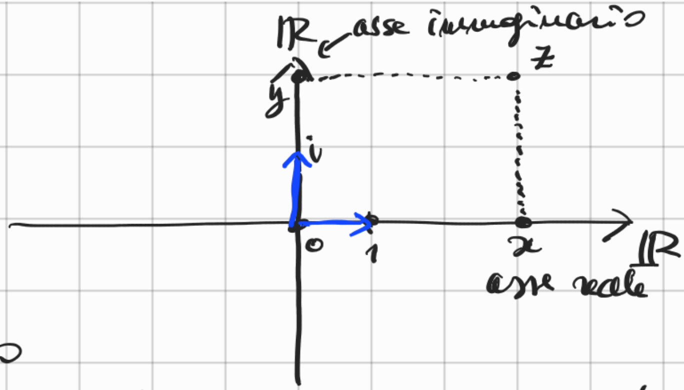
$a^{\frac{p}{q}} \overset{?}{=} \sqrt[q]{a^p}$ $\qquad$ anche per $a<0$

p pari o q dispari.

Solo che $\quad \frac{1}{\underbrace{3}_{\text{dispari}}} = \frac{2}{\underbrace{6}_{\text{pari}}}$

Con questa definizione: $\quad \underbrace{\left((-2)^6\right)^{\frac{1}{2}}}_{=\,8} \neq \underbrace{(-2)^{6\cdot\frac{1}{2}}}_{=\,-8}$

NUMERI COMPLESSI



pensiamo $1 \in \mathbb{R}$
come un vettore del piano
scegliamo $i \notin \mathbb{R}$ (lo pensiamo ortogonale a 1 e unitario)

Ogni punto del piano z avrà coordinate (x, y), $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$
e si scriverà, usando $1, i$ come base:

parte reale di z

$$z = x \cdot 1 + y \cdot i = x + iy \qquad 1 \equiv (1,0)$$

$x \cdot 1 \cong x$ — parte immaginaria $\qquad i \equiv (0,1)$

$\mathbb{C}$ è l'insieme dei punti di questo spazio vettoriale reale di dimensione 2.

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$$

Abbiamo quindi già definite:

(1) la somma:

$$z = x + iy \qquad (x, y)$$
$$w = a + ib \qquad (a, b)$$

$$z + w = (a + x) + i(b + y)$$

[ovvero: $(x \cdot \underline{1} + y \cdot \underline{i}) + (a \cdot \underline{1} + b \cdot \underline{i}) = x \cdot \underline{1} + a \cdot \underline{1} + y \cdot \underline{i} + b \cdot \underline{i}$
$= (x + a) \cdot 1 + (y + b) \cdot i$]

(2) il prodotto per scalare: $t \in \mathbb{R}$

$$t \cdot z = t(x + iy) = tx + i\,ty$$

MA possiamo definire un prodotto su $\mathbb{C}$

se vale proprietà distributiva

$$z\cdot w = (x+iy)\cdot(a+ib) = x\cdot a + iya + xib + iyib$$

proprietà commutativa

$$= a\cdot x + iay + ibx + i^2 by$$

proprietà distributiva

$$= a\cdot x + i(ay+bx) + i^2 by.$$

$$i^2 = -1$$

$$(x+iy)\cdot(a+ib) = (ax-by) + i(ay+bx).$$

[per definizione]

** Esercizio per  verificare che $\mathbb{C}$ è un campo