ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 22 - 13.11.2024

SOTTOSUCCESSIONI (o ESTRATTE)

$L = \{ \lim a_{n_k} : a_{n_k}$ è una estratta regolare di $a_n \}$

$$\begin{cases} \limsup_{n\to+\infty} a_n = \sup L & \overline{\lim} \\ \liminf_{n\to+\infty} a_n = \inf L & \underline{\lim} \end{cases}$$

Teorema (proprietà caratteristica della convergenza) Fissato $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$

$a_n \to \ell$ (2) $\iff$ $\forall$ estratta a_{n_k} $\exists$ estratta dell'estratta $a_{n_{k_j}} \to \ell$. (1)

dim (⇒) ovvio

(⇐) per assurdo supponiamo che valga (1) ma non (2).

esiste U intorno di ℓ tale che frequentemente $a_n \notin U$.

$\exists\, n_k : a_{n_k} \notin U$ (1) $\exists\, k_j$ t.c. $a_{n_{k_j}} \to \ell$

$a_{n_{k_j}} \notin U$ ma $a_{n_{k_j}} \to \ell$ assurdo □

ES $a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ n & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$

è non limitata
è indeterminata
$L = \{0, +\infty\}$

ES $a_n = (-n)^n = (-1)^n n^n$

è non limitata
è indeterminata (su $\mathbb{R}$)
(ma $\to \infty$ su $\mathbb{C}$)

Teorema (Bolzano - Weierstrass)

Sia a_n una successione $(a_n \in \mathbb{R}$ o $a_n \in \mathbb{C}$ o $a_n \in \mathbb{R}^4)$

① Allora a_n ha una estratta regolare.

② Inoltre se a_n è limitata esiste una estratta convergente.

③ Se a_n non è limitata esiste una estratta divergente.

dim ① ⇒ ② ovvio perché se a_n è limitata $(\exists M \in \mathbb{R}$ tc. $|a_n| \leq M)$ anche a_{n_k} è limitata. Ma limitata e regolare ⇓ convergente.

③ a_n non limitata.
su $\mathbb{R}$ è superiormente illimitata o inferiormente illimitata.
Supponiamo sia superiormente illimitata.
$\underline{\forall M \in \mathbb{R} \; \exists n \in \mathbb{N} : a_n > M}$.
Allora costruisco una estratta divergente:

n_1 tc. $a_{n_1} \geq 1$

n_2 tc. $n_2 > n_1$ e $a_{n_2} \geq 2$

⋮

$\boxed{\text{frequentemente } a_n \geq k+1}$

n_{k+1} tc. $n_{k+1} > n_k$ e $a_{n_{k+1}} \geq k+1$, ...

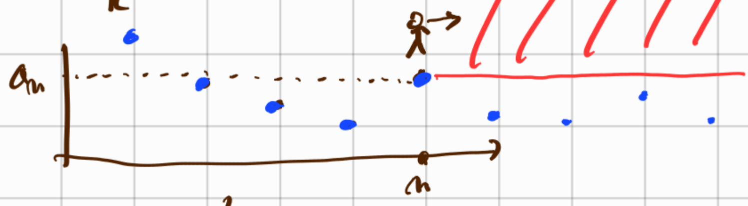
$a_{n_k} \geq k \to +\infty$ $\underline{\text{ok}}$ ③

[su $\mathbb{C}$ e su $\mathbb{R}^4$
prendo $b_k = |a_k|$
$a_k \to \infty \iff |a_k| \to +\infty$]

① su $\mathbb{R}$ discende dal teorema seguente, perché monotona $\Downarrow$ regolare

Teorema (esistenza di estratte monotone)

$a_n \in \mathbb{R}$ esiste n_k : a_{n_k} è monotona



dim (dei Picchi)

$$P = \{ n \in \mathbb{N} : \forall k \geq n \quad a_k \leq a_n \}$$

2 alternative:

① P è finito ② P è infinito.

① P è finito c'è un punto $n = \max P$

$\forall k > n \quad k \notin P \Rightarrow \exists\, j > k$ t.c. $\boxed{a_j > a_k}$.

posso costruire una sottosuccessione strettamente crescente. [$n_1 = n+1$ $\exists\, n_2 : a_{n_2} > a_{n_1}$ .....]

[Se $P \neq \emptyset$ a_{n_k} è limitata $\leq a_n$]

② P è infinito $\exists\, n_k : P = \{ a_{n_k} \}$ a_{n_k} è decrescente □

Completiamo Bolzano-Weierstrass caso ① su $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}^n$.

Su $\mathbb{C}$: $a_n = x_n + i y_n$

$x_n \in \mathbb{R} \Rightarrow$ esiste x_{n_k} regolare

$y_{n_k} \in \mathbb{R} \Rightarrow$ esiste $y_{n_{k_j}}$ regolare

ma anche $x_{n_{k_j}}$ è regolare

a_n è regolare.

Su $\mathbb{R}^n$ $a_n = (x_n, y_n, z_n, \dots)$ si fa lo stesso.....

Proprietà dei punti limite

1. $L \neq \emptyset$ (Bolzano - Weierstress)
2. $\limsup a_n \geq \liminf a_n$. (ovvio)
3. $\limsup a_n = \liminf a_n \iff a_n$ è regolare

(Procedimento diagonale) → 4. L è chiuso (per passaggio al limite: $\forall\, \ell_n \in L,\ \ell_n \to \ell$ allora $\ell \in L$) (es: $L \neq (0,1)$)

5. $\limsup a_n, \liminf a_n \in L$ $\left(\begin{array}{l} \limsup a_n = \max L \\ \liminf a_n = \min L \end{array} \right)$

6. (sugli appunti)

7. $$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \overbrace{\sup_{k\geq n} a_k}^{\text{decrescente}}$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\inf_{k\geq n} a_k}_{\text{crescente.}}$$

Sugli appunti: operazioni che si possono fare con limsup e liminf.

[ES $\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$
$\liminf(a_n + b_n) \geq \liminf a_n + \liminf b_n$]

Esempio di teorema che si dimostra più facilmente usando limsup e liminf.

$\boxed{\text{ES } a_n = (-1)^n \quad 1, -1, 1, -1, 1 \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \to 0}$

Teorema (convergenza alla Cesàro)

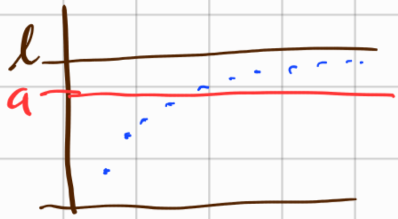
1. Se $a_n \to \ell$ allora $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \to \ell$

2. [rapporto ⇒ radice] se $a_n > 0$ $\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell} \in [0, +\infty]$.

Allora $\boxed{\sqrt[n]{a_n}} \to \ell$.

dim 1. Sia $q < \ell$. Allora $a_n > q$ definitivamente.

$\exists\, N$ t.c. $\forall\, k \geq N \quad a_k \geq q$.



(se $n>N$)

$$b_n = \frac{1}{n}\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k} = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{n} a_k\right)$$

$$\geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} a_k + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n} q$$

$$= \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{k=1}^{N} a_k} + \frac{q\cdot(n-N)}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 + q$$

NON POSSO SCRIVERE $\lim b_n \geq q$ ma posso scrivere $\boxed{\liminf b_n \geq q}$

Questo è vero $\forall q < \ell \implies \liminf b_n \geq \ell$

Ripeto dall'alto e scopro che $\forall q > \ell$

$$(\forall q>\ell \quad \limsup b_n \leq q) \implies \limsup b_n \leq \ell$$

$$\ell \leq \liminf b_n \leq \limsup b_n \leq \ell$$

$$\limsup b_n = \liminf b_n = \ell \implies \exists \lim b_n = \ell \qquad \square$$

2.

$$\ln \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{n}\ln a_n = \frac{1}{n}\ln\left(a_0\cdot\frac{a_1}{a_0}\cdots\frac{a_{n-2}}{\cdot}\,\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\,\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n}\ln a_0}_{\downarrow\ 0} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\frac{a_{k+1}}{a_k}}_{\downarrow\ 1.\ \ \ln \ell}$$

$\frac{a_{k+1}}{a_k} \to \ell$

$\ln\frac{a_{k+1}}{a_k} \to \ln \ell$

$$\ln\sqrt[n]{a_n} \to \ln \ell \underset{\substack{(\exp)\\ \text{è continua}}}{\implies} \sqrt[n]{a_n} \to \ell \qquad \square$$

Esercizio

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

$\square$

$$\ell \leftarrow \frac{n+1}{n\cdot(-1)^n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{(-1)^n} = (-1)^n + \cancel{\frac{(-1)^n}{n}}^{\,0}$$

$$x-1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$$

$$1-\frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \leq \boxed{\frac{\lfloor x \rfloor}{x}} \leq \frac{x}{x} = 1$$

$1-\frac{1}{x} \downarrow 1$ per $x \to \infty$

$\frac{\lfloor x \rfloor}{x} \downarrow 1$