ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 27 - 25.11.2024

test settimanale — es 13

Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge:

$$\sum \left(\sqrt[n]{n} - \sqrt[n]{2}\right)^\alpha$$

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln n}{n}} \to e^0 = 1 \qquad \sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln 2}{n}} \to e^0 = 1$$

$$a_n = \left(\sqrt[n]{n} - \sqrt[n]{2}\right)^\alpha \to 0 \quad \text{se } \alpha > 0$$

condizione necessaria.

$$\sqrt[n]{n} - \sqrt[n]{2} = e^{\frac{\ln n}{n}} - e^{\frac{\ln 2}{n}} =$$

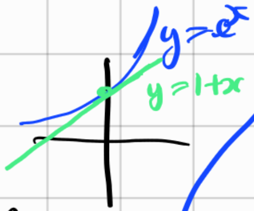
$$= e^{\frac{\ln 2}{n}}\left[e^{\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln 2}{n}} - 1\right]$$

$e^{\frac{\ln 2}{n}} \to 1$

$$\sim e^{\frac{\ln n - \ln 2}{n}} - 1 \sim \frac{\ln n - \ln 2}{n}$$

e^x con $x \to 0$

$$\boxed{\frac{e^x - 1}{x} \to 1} \quad \text{per } x \to 0$$



$$\left[\, e^x = 1 + x + \varepsilon(x) \quad \varepsilon(x) << x \,\right]$$

$$\varepsilon(x) = e^x - 1 - x$$

$$= \frac{e^x - 1 - x}{x} = \frac{e^x - 1}{x} - 1 \to 0$$

$e^x - 1 \sim x$ per $x \to 0$

$$a_n \sim \left(\frac{\ln n - \ln 2}{n}\right)^\alpha \sim \frac{(\ln n)^\alpha}{n^\alpha}$$

$\sum a_n$ ha lo stesso carattere di

$$\sum \frac{\ln^\alpha n}{n^\alpha}$$

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge sse $\alpha > 1$

Se $\alpha > 1$ $\quad \ln^\alpha n << n^\varepsilon$

$$\frac{\ln^\alpha n}{n^\alpha} << \frac{n^\varepsilon}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}$$

$$\boxed{\alpha > 1}$$

se scelgo $\varepsilon > 0$ in modo che $\alpha - \varepsilon > 1$ $\quad \sum \frac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}$ converge.

Se $\alpha \le 1$ $(\alpha > 0)$ $\quad \frac{\ln^\alpha n}{n^\alpha} >> \frac{1}{n^\alpha}$ $\quad \sum \frac{1}{n^\alpha}$ divergente

SERIE a termini positivi

- se $a_n \geq 0$ $\quad \sum a_n$ non è indeterminata.
- $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ è convergente $\iff$ $\alpha > 1$ (SERIE ARMONICA GENERALIZZATA)
- $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ è convergente $\iff$ $|q| < 1$. (SERIE GEOMETRICA)
- Criteri di confronto: posso confrontare con serie note.

Criterio del rapporto e della radice

Oss
$$q^n \ll \frac{1}{n^\alpha} \ll Q^n$$
se $q<1$ $\qquad$ $Q>1$

Teorema Se $a_n > 0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell$ $\begin{cases} \text{se } \ell < 1 & \text{la serie } \sum a_n \text{ converge} \\ \text{se } \ell > 1 & \text{la serie } \sum a_n \text{ diverge} \end{cases}$

$\Downarrow$ criterio rapporto/radice

Se $a_n \geq 0$, $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$ $\quad$ stessa cosa

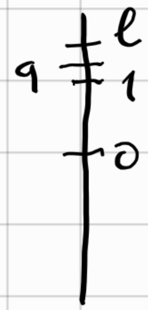
Più precisamente basta $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$

ES (NEGATIVI) $\quad a_n = \frac{1}{n^\alpha}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{(n)^\alpha}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^\alpha \to 1^\alpha = 1$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^\alpha \to \left(\frac{1}{1}\right)^\alpha = 1.$$

dim facciamo il caso $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$.



Caso $\ell > 1$ prendo q $\quad 1 < q < \ell$

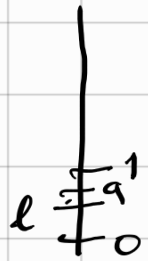
c'è una estratta n_k

tale che $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \to \ell > q > 1$

(frequentemente $\sqrt[n]{a_n} > q \qquad a_n > q^n \to \infty$)

Non vale la condizione necessaria per la convergenza

Caso $\ell < 1$ prendo q $\quad \ell < q < 1$



$\limsup \sqrt[n]{a_n} = \ell < q$

$\Rightarrow$ definitivamente $\sqrt[n]{a_n} < q$.

$q < 1$

$a_n < q^n \qquad$ ma $\sum q^n < +\infty$

$\square$.

ES $\quad \sum \frac{x^k}{k!}$ $\quad$ (SERIE ESPONENZIALE vedremo che $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$)

Se $x > 0$ è una serie a termini non-negativi.

$$a_k = \frac{x^k}{k!} \qquad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}} = \frac{x^{k+1}}{x^k} \cdot \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{x}{k+1} \to 0$$

la serie è convergente

Es $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ con $x>0$.

$a_k = \frac{x^k}{k}$ $\qquad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{x^{k+1}}{x^k} \frac{k}{k+1} = x \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{k}} \to x$ per $k \to \infty$

Se $0<x<1$ la serie converge

Se $x>1$ la serie diverge

Se $x=1$ ho $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ che è noto essere divergente.

Es ⌂ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$

$k=n^2$: $\quad a_{n^2} = \frac{1}{2^n} = b_n$

Es $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ con $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{se } k=n^2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$= \overbrace{\left(\frac{1}{2^1}+0+0\right)}^{1/2} \overset{+}{+} \overbrace{\left(\frac{1}{2^2}+0+0+\dots\right)}^{1/4} \overset{+}{+} \overbrace{\left(\frac{1}{2^3}+0+0+\dots\right.}^{\frac{1}{8}+\dots}$$

$k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \dots, 9,\ 10, \dots$

$n=1, \qquad 2, \qquad 3, \dots$

(serie lacunare)

- Intuitivamente (Metodo furbo ma pericoloso!) $\quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$

[associatività è valida perché la serie non è indeterminata (ha termini non negativi)]

- Metodo brutale: $\quad \sqrt[k]{a_k} = \begin{cases} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} & \text{se } k=n^2 \to \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \to 0 \end{cases}$

$\lim \sqrt[k]{a_k}$ non esiste ma $\limsup \sqrt[k]{a_k} = \frac{1}{2}$

SOLO METODO FURBO

ES: $a_k = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } k = n^2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ $\quad \sum a_k = +\infty$

ES: $b_k = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{se } \sqrt{k} \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ $\quad \sum b_k < +\infty$

SERIE di POTENZE

$z \in \mathbb{C}$ $\quad f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot z^k$ $\quad$ o $\quad x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot x^k$

$a_k \in \mathbb{C}$ $\quad$ z parametro $\qquad\qquad$ $a_k \in \mathbb{R}$

("POLINOMI" con infiniti termini)

Se $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ $\qquad \sum a_k \cdot x^k$

$a_k \geq 0$

$$\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{a_k \cdot x^k} = \limsup_{k \to \infty} (x \cdot \sqrt[k]{a_k}) = x \cdot \underbrace{\limsup \sqrt[k]{a_k}}_{\ell} = x \cdot \ell$$

se $x < \frac{1}{\ell}$ allora la serie è convergente

se $x > \frac{1}{\ell}$ la serie è divergente.

Cosa succede se $x < 0$? $\quad a_k < 0$? $\quad z \in \mathbb{C}$?

SERIE a TERMINI di SEGNO VARIABILE

Teorema (criterio di convergenza assoluta)

se $\sum |a_n|$ è convergente $\qquad a_n \in \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

allora $\sum a_n$ è convergente.

inoltre: $\left| \sum a_n \right| \leq \sum |a_n|$

dim Caso $a_n \in \mathbb{R}$

$$a_n = a_n^+ - a_n^-$$

$$x^+ = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$x^- = \begin{cases} 0 & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$\sum a_n^+$ $\sum a_n^-$ sono serie a termini positivi.

$$x^+ - x^- = x, \quad x^+ + x^- = |x|$$

uno dei due é nullo.

$$|a_n| = a_n^+ + a_n^-$$

Ipotesi: $\sum |a_n| < +\infty$

$$0 \leq a_n^+ + a_n^- = |a_n|$$
$$0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$$
$$0 \leq a_n^- \leq |a_n|$$

confronto $\Downarrow$

$$\begin{cases} \sum a_n^+ < +\infty \\ \sum a_n^- < +\infty \end{cases}$$

$\Downarrow$ linearità

$\sum (a_n^+ - a_n^-)$ è convergente

$$\| $$

$\sum a_n$.

Inoltre:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

per induzione su n sapendo $|a+b| \leq |a| + |b|$

$n \to \infty$

$n \to \infty$

continuità di $|\cdot|$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

Caso $a_n \in \mathbb{C}$

$$a_n = x_n + i y_n \qquad x_n = \operatorname{Re} a_n, \quad y_n = \operatorname{Im} a_n$$

$$|a_n|^2 = |x_n|^2 + |y_n|^2$$

$$\begin{cases} |x_n| \le |a_n| \\ |y_n| \le |a_n| \end{cases}$$

Se $\sum |a_n|$ converge anche $\begin{cases} \sum |x_n| \\ \sum |y_n| \end{cases}$ convergono

e quindi (Passo 1) $\begin{cases} \sum x_n \\ \sum y_n \end{cases}$ convergono.

$$\sum a_n = \sum (x_n + i y_n) = \sum x_n + i \sum y_n$$

Inoltre $\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \le \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ $\qquad |z+w| \le |z| + |w|$

$n \to \infty$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

$\square$

Def Diremo che $\sum a_k$ converge assolutamente se $\sum |a_k|$ converge.

Teo: Se $\sum a_n$ converge assolutamente allora $\sum a_n$ converge (semplicemente)

ES $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ $\qquad$ (vedremo che $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$)

Per quali $z \in \mathbb{C}$ converge assolutamente?

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left|\frac{z^k}{k!}\right| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|z|^k}{k!}$$ converge già fatto con $x=|z|$

converge assolutamente $\forall z \in \mathbb{C}$.

ES $\sum \frac{(-1)^k}{k^2}$ (SEGNI ALTERNI)

$$\sum \left|\frac{(-1)^k}{k^2}\right| = \sum \frac{1}{k^2}$$ è convergente

$\Rightarrow$ la serie data è assolutamente convergente

$\Rightarrow$ è convergente.

Teorema

ES (CATTIVO) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

non converge assolutamente: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.

ma vediamo che è comunque convergente.

$$\left(-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\left(\dots\right)$$

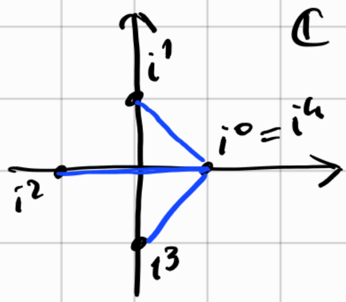
$$\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1} \sim \frac{1}{4n^2}$$

$\sum \frac{1}{4n^2}$ converge!

ES $\sum (-1)^k$ non (converge assolutamente $\sum 1 = +\infty$)

ed è indeterminata.

$a_n = |1 - i^n|$



a_n: $|1-1|, |1-i|, |1-(-1)|, |1-(-i)|, \dots$ si RIPETONO

$0, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, \dots$