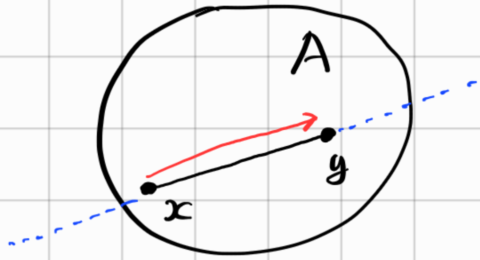
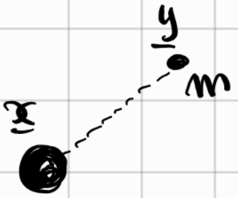
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 53 - 21.2.25

CONVESSITÀ

in geometria:





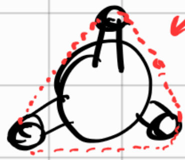
$$\frac{\overset{1-t}{M}\,x + \overset{t}{m}\,y}{M+m}$$

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso se $\forall \underline{x},\underline{y} \in A$ il segmento $[\underline{x},\underline{y}] \subseteq A$.

$$[\underline{x},\underline{y}] = \Big\{ \underbrace{\boxed{(1-t)\underline{x} + t\underline{y}}}_{\text{combinazione convessa o baricentrica}} : 0 \le t \le 1 \Big\}$$

$$(1-t)x + ty = \boxed{x + t(y-x)}$$

inviluppo convesso



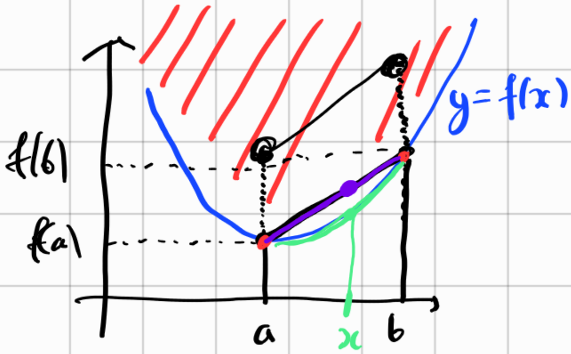
Analisi I intervallo

$f : I \to \mathbb{R}$ è convessa

$a, b \in I \quad a < b \quad t \in [0,1]$

$$\boxed{f\big(\underbrace{(1-t)a + tb}_{x}\big) \le (1-t)f(a) + t f(b)}$$

$\ge$ concava

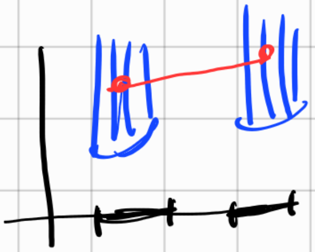


$Epi(f) = \{(x,y) : y \ge f(x)\}$

Teorema f è convessa $\iff$ $Epi(f)$ è convesso

$\Updownarrow$

la corda "sta sopra" il grafico.



I deve essere convesso $\Updownarrow$ su $\mathbb{R}$ intervallo

Es $f(x) = |x|$ è convessa.

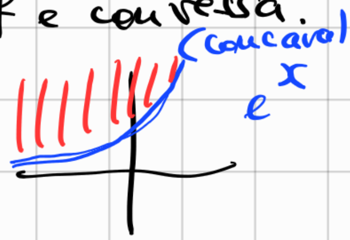
Es $f(x) = mx + q$ è convessa.

Obiettivo: dimostrare il seguente:

Teorema Se $f: I \to \mathbb{R}$ è derivabile due volte e $f''(x) \geq 0$ $(\leq)$ $\forall x \in I$ $\Longleftrightarrow$ f è convessa. (concava)

Es

$$\left| \begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ f''(x) = 2 \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} f(x) = e^x \\ f''(x) = e^x \end{array} \right.$$

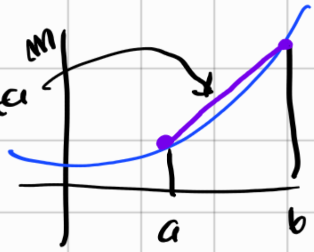


convesse

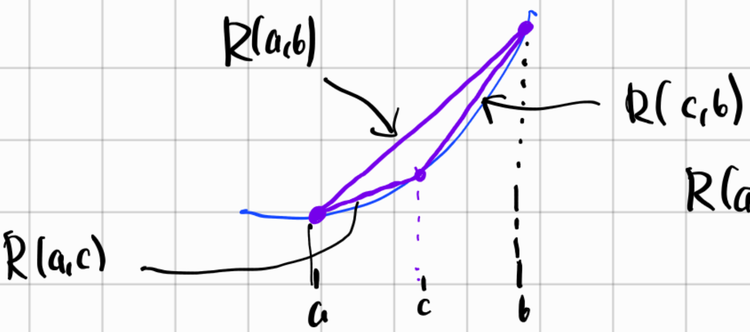
$$\left| \begin{array}{l} f(x) = \ln x \\ f''(x) = -\frac{1}{x^2} \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x} \\ f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} \end{array} \right.$$

Rapporto incrementale

$$R(a,b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \text{pendenza}$$



f è convessa $\Longleftrightarrow$ $R(a,b)$ è crescente rispetto entrambe le variabili



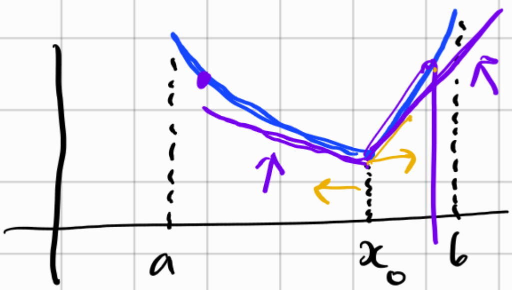
R crescente nella II variabile ✓

$$R(a,c) \leq R(a,b) \leq R(c,b)$$

crescente nella I variabile.

Teorema Se f è convessa su (a,b) e $x \in (a,b)$ allora f ha sempre derivata destra e derivata sinistra in x.

oss) il grafico di f sta sopra una retta "tangente"



esiste perché $R(x_0,x)$ è crescente

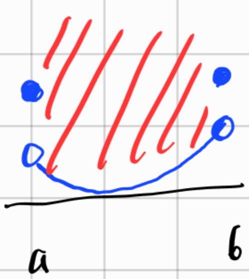
$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} R(x_0,x) = \inf_{x>x_0} R(x_0,x)$$

$$\geq$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} R(x_0,x) = \sup_{x<x_0} R(x_0,x)$$

$$R(x_0,x) = R(x,x_0)$$

Esempio (cattivo)



è convessa

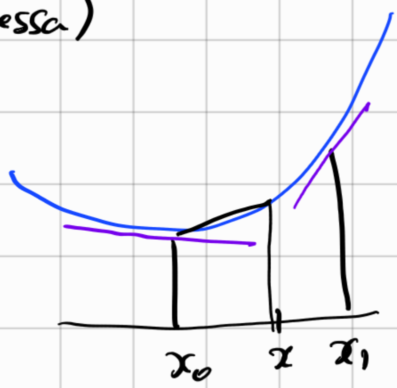
$$R(x_0,x) \leq f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0) \leq R(x_0,x)$$

se $x < x_0$ $\qquad$ se $x > x_0$

Se f è derivabile (e convessa)

$x_0 < x_1$

$$f'(x_0) \leq f'(x_1)$$

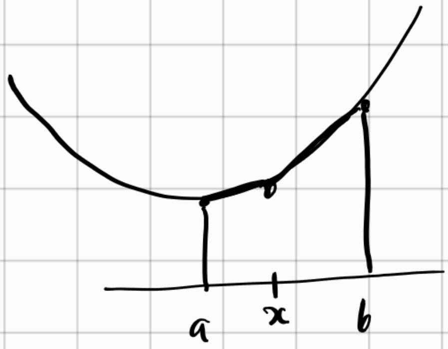


$$f'(x_0) = \inf_{x>x_0} R(x_0,x) \leq \sup_{x<x_1} R(x_1,x) = f'(x_1).$$

$\Rightarrow$ f' è crescente.

Viceversa se f è derivabile e f' crescente allora f è convessa.

dim



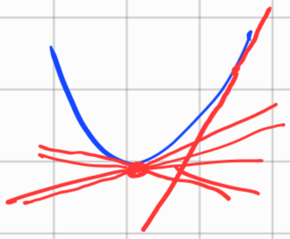
Basta mostrare che
$$R(a,x) \le R(x,b)$$
$$\quad \| \qquad\qquad \|$$
$$f'(x_1) \qquad f'(x_2)$$
Lagrange

$a < x_1 < x$ e $x_2 < b$ $\Rightarrow$ $f'(x_1) \le f'(x_2)$ ◻

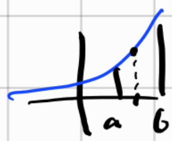
Corollario Se f è derivabile 2 volte e $f'' \geq 0$
$\Rightarrow$ f' è crescente $\Rightarrow$ f è convessa.

criterio di monotonia

Oss f convessa $\Rightarrow$ $\forall x_0$ esiste una funzione lineare
$$L(x) = mx + q$$
tale che $L(x_0) = f(x_0)$
e $\forall x$ $L(x) \le f(x)$



Dimostriamo la disuguaglianza AM GM



$f(x) = e^x$ è convessa $\Rightarrow$ $e^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}} \le \frac{1}{2}e^{\alpha} + \frac{1}{2}e^{\beta}$

convessità $t = \frac{1}{2}$

$e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} = \sqrt{e^{\alpha}e^{\beta}}$ $\qquad$ $\frac{1}{2}e^{\alpha} + \frac{1}{2}e^{\beta} = \frac{e^{\alpha}+e^{\beta}}{2}$

$a = e^{\alpha}$ $\quad$ $b = e^{\beta}$

$$GM = \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} = AM$$

(Ma questo si poteva fare più facilmente:

$$0 \le (a-b)^2 = a^2+b^2-2ab = (a+b)^2-4ab$$

$$4ab \le (a+b)^2 \qquad \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \;)$$

(MA) come dimostro che $\frac{a_1+\dots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$ (?)

Teorema (disuguaglianza di Jensen)

Se f è convessa allora $\forall a_k, \forall t_k, t_k \ge 0, \sum_{k=1}^{n} t_k = 1$

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k a_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} t_k f(a_k)$$

$t_k \ge 0, \quad \sum t_k = 1$ (se $n=2$ è la definizione)

dim sia $x_0 = \sum_{k=1}^{n} t_k a_k$ sia $L(x)$ lineare tale che $L(x_0) = f(x_0)$ e $L(x) \le f(x) \quad \forall x$

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k a_k\right) = f(x_0) = L(x_0) = L\left(\sum_{k=1}^{n} t_k a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} t_k L(a_k) \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} t_k f(a_k) \quad \square$$

L è lineare

Corollario AM $\ge$ GM anche su n punti.

Variante con gli integrali:

Teorema (Jensen) Se f convessa:

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

è un caso particolare di:

$$\int_a^b h(x)dx = 1$$

g qualunque

f convessa

$$f\left(\int_a^b g(x)\,h(x)dx\right) \leq \int_a^b f(g(x))\,h(x)dx.$$

$$\left(f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X))\right)$$

dim $\quad y_0 = \int_a^b g(x)\,h(x)\,dx \qquad L(y_0) = f(y_0)$

$$L(y) \leq f(y)$$

$$\to f(y_0) = L(y_0) = L\left(\int_a^b g(x)\,h(x)dx\right) \overset{(*)}{=} \int_a^b L(g(x)) \cdot h(x)dx \leq$$

$L(y) = my + q.$

$$\leq \int_a^b f(g(x))\,h(x)dx.$$

$\square$

(4) $L(y) = my + q$

$$L\left(\int_a^b \quad\right) = m\left(\int_a^b \quad\right) + q = \int_a^b m \cdot g(x) \quad (x)\,dx + q\int_a^b h(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \left[m \cdot g(x)\, h(x) + q\, h(x) \right] dx$$

$$= \int_a^b \left(m \cdot g(x) + q \right) h(x)\, dx = \int_a^b L(g(x))\, h(x)\, dx$$