26/02/2025

LEZIONE 55

Funzioni analitiche

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \qquad\qquad e^x \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{(sì)!}$$

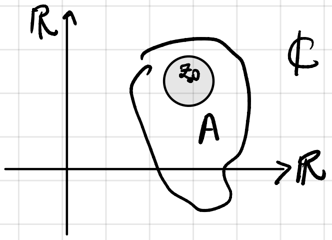
Def. $f: A \subseteq \mathbb{C} \,(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C} \,(\mathbb{R})$ si dice essere analitica se $\forall z_0 \in A \; \exists r>0, \exists a_k \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{f(z) = \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k}_{\text{serie di potenze}} \qquad \forall z \in B_1(z_0)}$$

$\forall z_0 \in A \quad \exists r>0 \;$ t.c. $\; B_r(z_0) \subseteq A \;$ dove $B_r(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r \}$

$\downarrow$

A aperto



Teo: Tutte le funzioni elementari sono analitiche dove sono derivabili

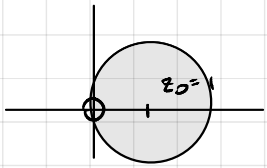
e^z, e^x, $\cos x$, $\sin x$, x^α $(x>0)$, $\tan x$, $\arctan x$, $\arcsin x$, $\arccos x$

su $(-1, 1)$

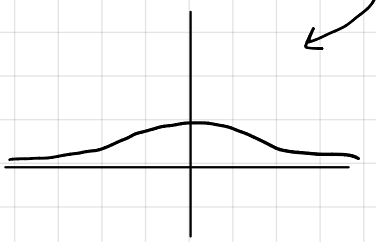
esempio $\quad \frac{1}{z}$ è analitica ; se $z_0 = 1 \qquad \frac{1}{1-w} = \sum_{k=0}^{+\infty} w^k \qquad z = 1-w$, $\; w = 1-z$

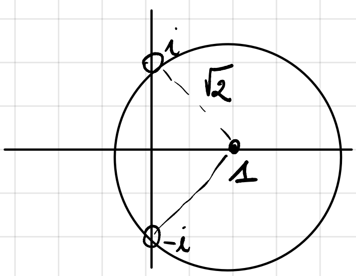
$$\frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{+\infty} (1-z)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (z-1)^k$$

converge $\Leftrightarrow |z-1| < 1$



esempio $\quad f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ definita su tutto $\mathbb{R}$, non su tutto $\mathbb{C}$





funzione analitica (lo è $\frac{1}{z}$ quindi se sostituisco z a z un polinomio ottengo comunque una funzione analitica)

La funzione converge sul cerchio di raggio max che non tocca i punti di singolarità

L'insieme di convergenza di una serie di potenze è sempre un cerchio (che può essere ∞, cioè tutto il piano complesso)

Serie di potenze

$$\boxed{f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k}$$

fissato $z_0 \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$, $a_k \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$
z rimane variabile

Qual è l'insieme di convergenza (al variare di z)?

$f: A \to \mathbb{C}$ dove $A = \{ z \in \mathbb{C} : \sum_k a_k (z-z_0)^k \text{ converge} \}$

$\Rightarrow$ f è naturalmente definita sull'insieme di convergenza

Per trovare A, uso il criterio della radice: $L = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k||z-z_0|^k} =$

(uso convergenza assoluta per usare il criterio sui numeri complessi)

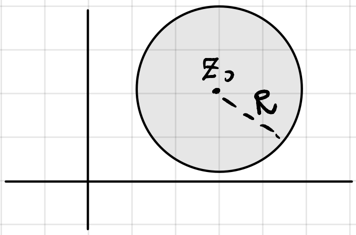
$= \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \cdot |z-z_0| =$

N.B.: L $\exists$ sempre (potrebbe essere ∞)

$= |z-z_0| \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$

$|z-z_0|$ non dipende da k

$\rightsquigarrow$ la serie converge se $L<1 \iff |z-z_0| < \dfrac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} =: R$



$\iff z \in B_R(z_0)$

lim sup di numeri reali non negativi $\longrightarrow$

$0 \Rightarrow R = +\infty$ e $A = \mathbb{C}$ (converge $\forall z$)

$+\infty \Rightarrow R = 0$ e $z_0 \in A$ (il criterio non mi dice altro)

negli altri casi $A \supseteq B_R(z_0)$

Cosa succede se $|z-z_0| > R$?

$\limsup_k |a_k||z-z_0|^k = +\infty$

(criterio della radice applicato alla successione dei termini:
successione $\to +\infty$ (non infinitesima) $\Rightarrow \sum a_k(z-z_0)^k$ non può convergere!

$\Rightarrow A \subseteq \overline{B_R(z_0)} = \{ z \in \mathbb{C} : |z-z_0| \le R \}$

$$\boxed{B_R(z_0) \subseteq A \subseteq \overline{B_R(z_0)}}$$

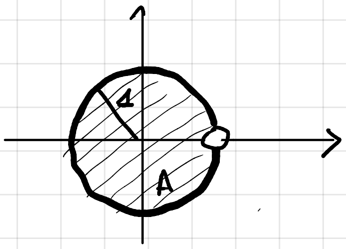
ma non so cosa succede sui punti di frontiera, cioè se $|z-z_0| = R$

esempio ① $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ $\quad z_0=0 \quad a_k=1$

$R=\left(\limsup_k \sqrt[k]{|a_k|}\right)^{-1}=1$ ha raggio di convergenza $R=1$

Se $|z|=1$ non converge (serie geometrica) $\Rightarrow$ converge se $|z|<1$, non converge se $|z|>1$

esempio ② $f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k}$ $\quad z_0=0$ $\begin{cases} a_k=\frac{1}{k}\\ a_0=0\end{cases}$ $\quad \sqrt[k]{|a_k|}=\frac{1}{\sqrt[k]{k}}\to 1 \quad R=1$



$\Rightarrow$ converge se $|z|<1$, non converge se $|z|>1$

se $|z|=1$ → $z=1$

altrimenti $\sum \frac{z^k}{k}$ converge (Dirichlet, Leibniz se $z=-1$)

esempio ③ $f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}$ $\quad \limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{1}{k!}}=\limsup_k \frac{1}{\sqrt[k]{k!}}=0$

rapporto/radice $\quad \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}}=\frac{1}{k+1}\to 0$

$\Rightarrow R=+\infty$ e la serie converge $\forall z$

reciproco

esempio ④ $f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}k!\,z^k$, $\quad A=\{0\}$, $\quad R=0$

Dunque, A è "cerchio" di raggio $R=\frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|a_k|}}$, R sempre definito

Teo $f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(z-z_0)^k$ è derivabile su $B_R(z_0)$

punti interni al cerchio (dove anche converge)

$f'(z)=\sum_{k=1}^{+\infty}k\, a_k (z-z_0)^{k-1}$

il termine 0 sparisce

$=\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)a_{k+1}(z-z_0)^k$ che è, di nuovo, una serie di potenze, con lo stesso raggio di convergenza ($\sqrt[k]{k+1}\to 1$)

Avendo dimostrato che è derivabile una volta e che la derivata ha le stesse proprietà, è derivabile infinite volte

$\Rightarrow$ **Corollario** $f\in C^\infty$ su B_R (proprietà locale)

Corollario f analitica $\Rightarrow f\in C^\infty$ (dappertutto)

dim (idea) rapporto incrementale ↴

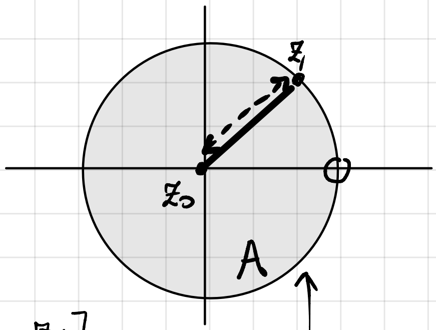
$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{\left((z+h-z_0)^k-(z-z_0)^k\right)}{h}$$

→ serie convergente

→ scambio lim / serie (stime uniformi)

Lemma di Abel sia $f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k$, R raggio di convergenza; se la serie converge in un punto z_1, allora posto $g(t)=f(z_0+t(z_1-z_0))$, $t\in\mathbb{R}$

caso interessante: sulla frontiera ($|z-z_0|=R$)



si ha che $\underset{\underset{f(z_1)}{\parallel}}{g(1)} = \lim_{t\to 1^-} g(t)$.

Inoltre, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k$ converge uniformemente su $[z_0, z_1]$

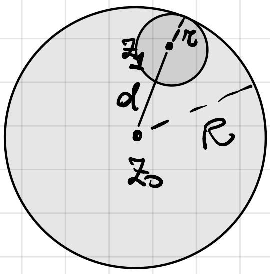
→ Cioè, in z_1 è continua solo se mi muovo sul raggio (dall'interno); non posso dire lo stesso se mi avvicino tangenzialmente (lungo la frontiera)

⇝ ci possono essere funzioni dove ci sono salti tangenzialmente ma non radialmente.

N.B.: problematica tipica delle funzioni in più variabili

Teo se $f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k$ (f è la somma di una serie di potenze con raggio di convergenza R)

allora $f: B_R(z_0)\to\mathbb{C}$ è analitica



dim (idea) dato $z_1\in B_R(z_0)$

$$r = R - \underbrace{|z_1-z_0|}_{d}$$

da sviluppare

$$\sum a_k(z-z_0)^k = \sum a_k(z-z_0+z_1-z_1)^k = \sum b_k(z-z_1)^k$$

Una funzione analitica è localmente sviluppabile in serie di potenze, che è analitica nel raggio di convergenza

Corollario $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$, perché vale Taylor

dim $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{N} a_k(z-z_0)^k + \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{polinomio di Taylor}}$ $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{R(z) = o(|z-z_0|^N)}$

$$\frac{R(z)}{(z-z_0)^N} = \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k-N} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+N+1} (z-z_0)^k$$

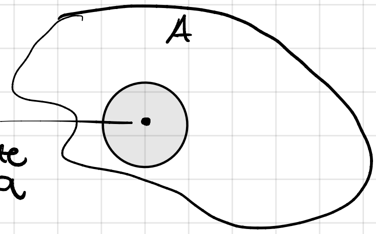
dunque, $\boxed{e^z = \sum \frac{z^k}{k!}}$

Teo (criterio di analiticità) $\Longrightarrow$ le funzioni elementari sono analitiche

Se $f \in C^\infty(A)$, A aperto se $\forall z_0 \in A$ $\exists r > 0$, $M > 0$, $L > 0$ tale che se

$|z - z_0| < r$ si ha $\left| \frac{f^{(k)}(z)}{k!} \right| \leq M L^k$

stima delle derivate nella palla



allora, f è analitica

dim (idea) usare la formula di Taylor con $\underbrace{\text{resto di Lagrange}}$

coda della serie $\longrightarrow 0$

$\rightsquigarrow$ derivata dell'ordine successivo in un punto intermedio

si prende $M L^k \underbrace{(z - z_0)^k}_{\varepsilon^k}$