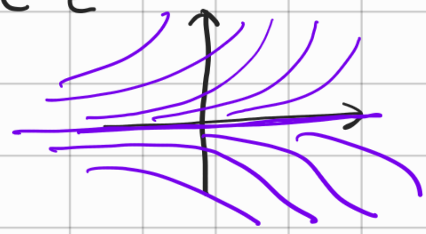
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 58 — 5.3.2025

Eq. a variabili separabili

[già visto]

Esempio $\quad u' = u \longrightarrow u(x) = c \cdot e^x$



Esempio $\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = 1 \end{cases} \qquad x_0 = 0$

$u' = u^2$ divido per u

dove $u(x) \neq 0$ si ha:

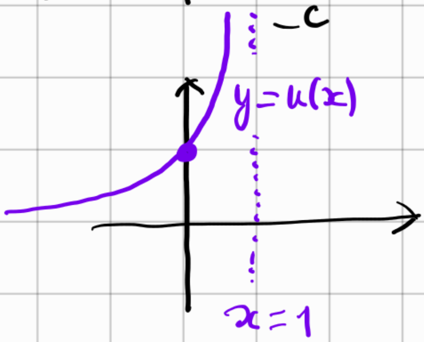
METODO 1 $\quad \dfrac{u'}{u^2} = 1 \qquad \dfrac{1}{u^2}\dfrac{du}{dx} = 1 \qquad \int \dfrac{du}{u^2} = \int dx$

$$\int \frac{1}{u^2}\,du = x + c$$

$$-\frac{1}{u} = x + c \qquad u(x) = \frac{1}{-x-c}$$

$$u(0) = 1 \Rightarrow 1 = u(0) = \frac{1}{-c} \qquad c = -1$$

$$u(x) = \frac{1}{1-x}$$



intervallo nominale di esistenza è $x < 1$

$I = (-\infty, 1)$

METODO 2

$$\frac{u'}{u^2} = 1 \quad \text{integro da } x_0 = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} = 1} \qquad \int_{x_0}^{x} \frac{1}{u^2(t)} u'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} 1\,dt$$

$$\begin{cases} u = u(t) \\ du = u'(t)\,dt \end{cases}$$

$$\int_{u(x_0)}^{u(x)} \frac{1}{u^2}\,du = \int_{x_0}^{x} 1\,dt$$

punto iniziale

$\boxed{x_0 = 0}$

$u(x_0) = u(0) = 1$

valore iniziale

$$\int_{1}^{u(x)} \frac{1}{u^2}\,du = \int_{0}^{x} 1\,dt$$

$$\left[-\frac{1}{u}\right]_1^{u(x)} = \left[t\right]_0^{x}$$

$$-\frac{1}{u(x)} - \left(-\frac{1}{1}\right) = x - 0$$

$$-\frac{1}{u(x)} + 1 = x \qquad -\frac{1}{u(x)} = x - 1$$

$$u(x) = \frac{1}{1-x}$$

$\square$

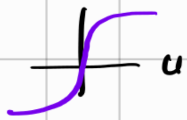
Osservazione Nonostante $u'=u^2$ abbia senso per ogni $x\in\mathbb{R}$ e per ogni $u(x)\in\mathbb{R}$ la soluzione non è definita su tutto $\mathbb{R}$

$$u(x)=\frac{1}{1-x} \qquad x<1.$$

[diremo che la soluzione non è GLOBALE perché ESPLODE in tempo finito $(x\to 1^-)$]

Esercizio risolvere $u'=u^p$ per ogni $p>1$

Esempio [BAFFO DI PEANO]



$$u'=\sqrt[3]{u} \qquad \left(p=\frac{1}{3}\right) \qquad u'=f(u)$$

dove $\boxed{u(x)\neq 0}$ si ha e f $\boxed{\text{non è } C^1.}$

$$\frac{u'}{\sqrt[3]{u}}=1 \qquad \int u^{-\frac{1}{3}}\,du=\int dx$$

$$\boxed{\sqrt[3]{y}=\frac{y}{|y|}\cdot\sqrt[3]{|y|}=y\,|y|^{-\frac{2}{3}}}$$

$$\frac{3}{2}u^{\frac{2}{3}}=x+c$$

$$\sqrt[3]{u^2}=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}c$$

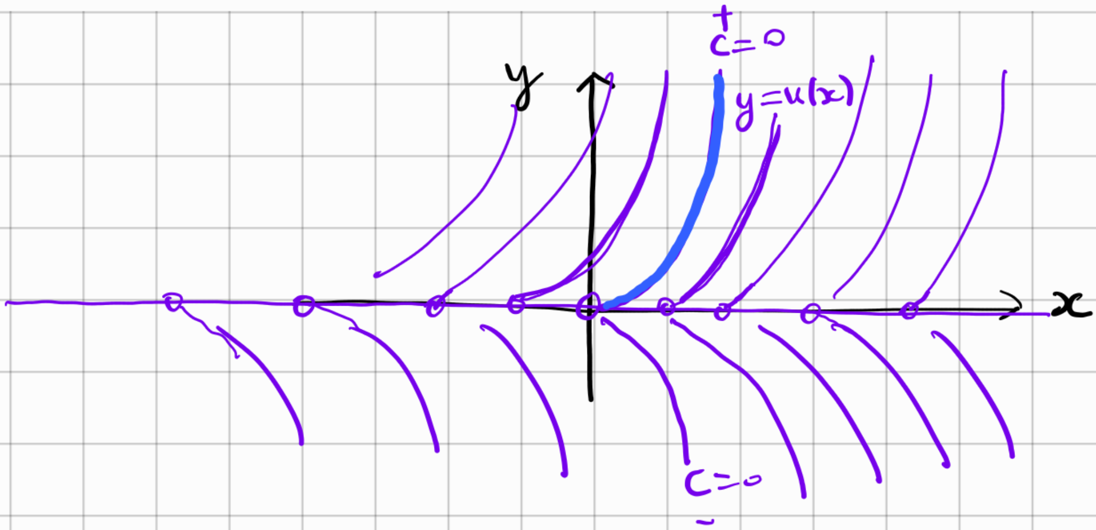
$$u^2=\left(\frac{2}{3}(x+c)\right)^3 \quad \Leftarrow \quad x\geq -c$$

$$\Updownarrow$$

$$x>-c$$

$$u(x)=\pm\sqrt{\frac{8}{27}(x+c)^3}$$

$x=-c\Rightarrow u=0$ escluso



anche $u=0$ è soluzione

⚠ la soluzione $\quad u(x) = \pm\sqrt{\frac{8}{27}(x+c)^3} \qquad x>-c$

NON è massimale! Infatti per $x\to -c$

$$u(x)\to 0 \quad e \quad u'(x)=\sqrt[3]{u(x)}\to 0$$

per $x\to -c$.

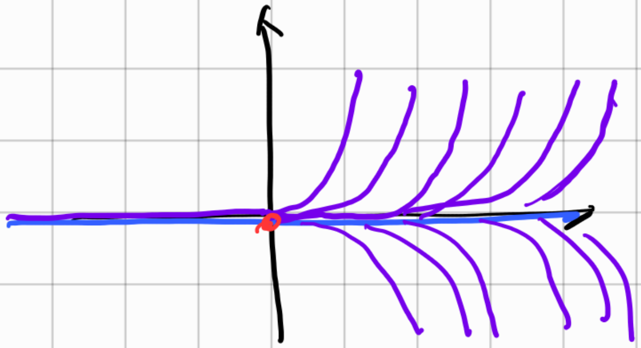
posso estendere $u(x)$ anche in $x=-c$

ma posso anche estendere la soluzione per $x<-c$ ponendo $u(x)=0$

⚠ ho 2 soluzioni diverse che risolvono lo stesso pb. di Cauchy:

$$\begin{cases} u' = \sqrt[3]{u} \\ u(0)=0 \end{cases}$$

(c'è esistenza ma non unicità)



← ho infinite soluzioni con la stessa condizione iniziale (BAFFO)

Esempio (di non esistenza)

$$u' = f(x)$$ dove $f(x)$ non è una derivata

es: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

EQUAZIONI LINEARI DI ORDINE n

$$\boxed{a_n(x) \cdot u^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) u^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x) u'(x) + a_0(x) u(x) = b(x)}$$

$$L[u](x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) \cdot u^{(k)}(x) = b(x)$$

$$\left[\underline{a}(x) \cdot \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \\ \vdots \\ u^{(n)}(x) \end{pmatrix} = b(x) \right]$$

dove $a_0, \dots, a_n, b$ sono funzioni definite su uno stesso insieme (intervallo) I

$L : C^n(I) \to C(I)$ è lineare:

$$L(\lambda u + \mu v) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (\lambda u + \mu v)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (\lambda u^{(k)} + \mu v^{(k)})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\lambda a_k u^{(k)} + \mu a_k v^{(k)} \right)$$

$$= \lambda \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k u^{(k)}}_{L[u]} + \mu \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k v^{(k)}}_{L[v]} = \lambda L[u] + \mu L[v]$$

Se $b=0$ diremo che l'equazione lineare è <u>OMOGENEA</u>.

$$L[u] = 0$$

<u>Osservazione</u>: Se u_1 e u_2 sono soluzioni di una eq. <u>non</u> omogenea: $L[u_1] = b$

$$L[u_2] = b$$

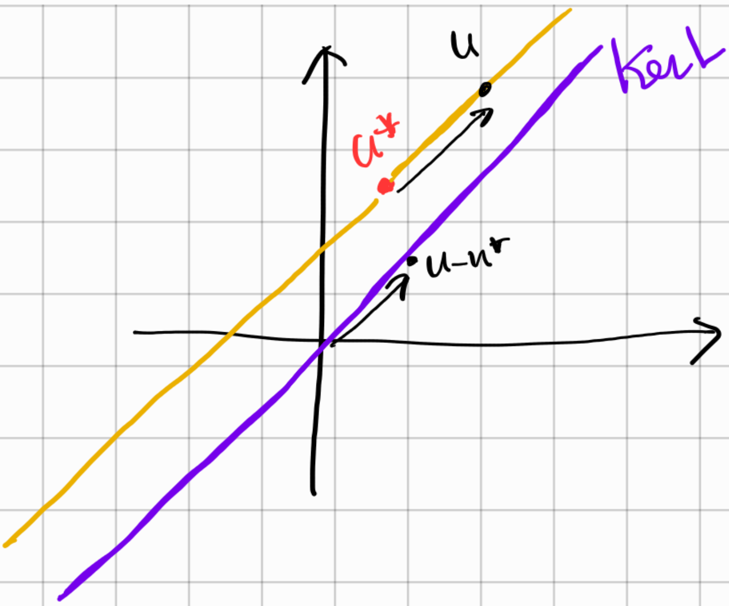
allora $L[u_1 - u_2] = L[u_1] - L[u_2] = b - b = 0$

Quindi se trovo una singola soluzione della non omogenea: SOLUZIONE PARTICOLARE

$$L[u^*] = b$$

Tutte le altre soluzioni si ottengono da u^* sommando una soluzione dell'omogenea:

$$L[u^*] = b, \; L[u_0] = 0 \implies L[u^* + u_0] = b.$$



$\{u : L[u] = 0\} = \text{Ker } L$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^n$

$\{u : L[u] = b\} = u^* + \text{Ker } L$

(perché: $u - u^* \in \text{Ker } L$)

EQ. LINEARI OMOGENEE, A COEFFICIENTI COSTANTI DI ORDINE n

$$L[u] = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot u^{(k)}$$

a_k è costante.
$a_n \neq 0$.

<u>Esempio</u>

$$L[u] = u'' - 3u' + 2u = 0$$

<u>Idea</u>: cerco soluzioni della forma $u(x) = e^{\lambda x}$:

$$u(x) = e^{\lambda x}, \quad u'(x) = \lambda e^{\lambda x}, \quad u''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$L[e^{\lambda x}] = \lambda^2 e^{\lambda x} - 3\lambda e^{\lambda x} + 2 e^{\lambda x}$$

$$= (\lambda^2 - 3\lambda + 2) e^{\lambda x} = 0 \qquad \forall x$$

$$\Updownarrow$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$ si chiama POLINOMIO

ASSOCIATO alla equazione.

Se λ è radice di P $u_\lambda(x) = e^{\lambda x}$ è soluzione

dell'equazione omogenea

Se $\lambda_1 \dots \lambda_n$ sono zeri distinti di P

allora $u(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k x}$

è sol. della equazione.

Nell'esempio: $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$

$\lambda_{12} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$ e^x, e^{2x} sono sol.

e quindi $u(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ sono

tutte soluzioni.

Esercizio $\boxed{\alpha}$ $u_1(x) = e^x$, $u_2(x) = e^{2x}$ sono vettori indipendenti.