ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 62 – 17.3.2025

Eq. differenziali lineari di ordine n, non omogenee

2. Metodo della variazione delle costanti
(per trovare una soluzione particolare della eq. non omogenea)

$$L[u] = u^{(n)} + a_{n-1}(x)\,u^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\,u'(x) + a_0(x)\,u(x) = b(x)$$

Supponiamo di conoscere una base di soluzioni della omogenea $L[u]=0$
$u_1, \dots, u_n$ soluzioni indipendenti

Tutte le soluzioni di $L[u]=0$ sono:

$$u(x) = c_1\,u_1(x) + \dots + c_n\,u_n(x) \qquad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

Cerco una soluzione u_* della non omogenea $L[u_*]=b$ della forma:

$$u_*(x) = c_1(x)\,u_1(x) + \dots + c_n(x)\,u_n(x)$$

Impongo che u_* soddisfi l'equazione $L[u_*]=b$.

$$\begin{array}{ll}
a_0 \cdot & u_* = c_1 \cdot u_1 + \dots + c_n \cdot u_n \\
a_1 \cdot & u_*' = c_1 \cdot u_1' + \dots + c_n \cdot u_n' + \left\{ c_1' u_1 + \dots + c_n' u_n = 0 \right. \\
a_2 \cdot & u_*'' = c_1 u_1'' + \dots + c_n u_n'' + \left\{ c_1' u_1' + \dots + c_n' u_n' = 0 \right. \\
& \vdots \\
a_{n-1} \cdot & \\
1 \cdot & \underline{u_*^{(n)} = c_1 u_1^{(n)} + \dots + c_n u_n^{(n)}} + \left| c_1' u_1^{(n-1)} + \dots + c_n' u_n^{(n-1)} \overset{?}{=} b(x) \right.
\end{array}$$

L'equazione $L[u_*]=b$ cioè

$$\underline{u_*^{(n)} + a_{n-1}\,u_*^{(n-1)} + \dots + a_1 u_*' + a_0 u} = b$$

diventa:

$$\begin{aligned}
a_0 \cdot u_* &= (c_1 \cdot u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n \cdot u_n)\,a_0\\
a_1 \cdot u_*' &= (c_1 \cdot u_1' + c_2 u_2' + \dots + c_n u_n')\,a_1\\
a_2 \cdot u_*'' &= (c_1 u_1'' + c_2 u_2'' + \dots + c_n u_n'')\,a_2\\
\vdots \quad & \quad \vdots\\
1 \; u_*^{(n)} &= c_1 u_1^{(n)} + c_2 u_2^{(n)} + \dots + c_n u_n^{(n)} + b(x)
\end{aligned}$$

$$L[u_*] = \underbrace{c_1 L[u_1] + c_2 L[u_2] + \dots + c_n L[u_n]}_{=0} + b(x)$$

$u_1 \dots u_n$ sono soluzioni dell'omogenea.

$$L[u_*] = b$$

Basta risolvere:

$$\begin{cases}
c_1' u_1 + \dots + c_n' u_n = 0\\
c_1' u_1' + \dots + c_n' u_n' = 0\\
\vdots \qquad\qquad = 0\\
c_1' u_1^{(n-1)} + \dots + c_n' u_n^{(n-1)} = b
\end{cases}$$

tutto dipende da x

$$\begin{bmatrix}
u_1 & u_2 & \dots & u_n\\
u_1' & u_2' & \dots & u_n'\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
c_1'\\ c_2'\\ \vdots\\ c_n'
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0\\ \vdots\\ 0\\ b
\end{bmatrix}$$

$$W(x) \cdot \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ \vdots \\ c_n'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{bmatrix}$$

dove

$$W(x) = \left[J(u_1) \,\middle|\, J(u_2) \,\middle|\, \dots \,\middle|\, J(u_n) \right]$$ (matrice Wronskiana)

dove $J(u) = \begin{bmatrix} u(x) \\ u'(x) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$ (Jet)

Teo Se $u_1 \dots u_n$ sono soluzioni indipendenti dell'equazione $L[u] = 0$ allora $\det W(x) \neq 0 \quad \forall x$.

ESEMPIO (sugli appunti)

dove $\cos x \neq 0$

$$u''(x) + u(x) = \frac{1}{\cos x} \quad (*)$$

Risolviamo l'omogenea: $u'' + u = 0$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i)$$

$u_1 = \cos x$

$u_2 = \sin x$

Tutte le soluzioni dell'omogenea: $u_0(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

Cerchiamo una soluzione particolare u_* della non omogenea $(*)$ della forma:

$$u_*(x) = c_1(x)\cdot\cos x + c_2(x)\cdot\sin x$$

Ripercorriamo i passaggi fatti in generale $\boxed{\text{(non necessario)}}$

$$u_*(x) = c_1(x)\cdot\cos x + c_2(x)\cdot\sin x$$

$$u_*'(x) = -c_1(x)\sin x + c_2(x)\cdot\cos x + \overbrace{\cancel{\left(c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x\right)}}^{0}$$

$$u_*''(x) = -c_1(x)\cos x - c_2(x)\cdot\sin x + \underbrace{-c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x}_{=\frac{1}{\cos x}}$$

$$u_*''(x) + u_*(x) = c_1(x)\left(\cancel{-\cos x + \cos x}\right) + c_2(x)\left(\cancel{-\sin x + \sin x}\right) + \frac{1}{\cos x}$$

$$\boxed{u_*'' + u_* = \frac{1}{\cos x}}$$

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0 \\ -c_1'\sin x + c_2'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x} \end{cases}$$

VA RISOLTO!

$$\begin{cases} c_1'\cos x + c_2'\sin x = 0 \\ -c_1'\sin x + c_2'\cos x = \frac{1}{\cos x} \end{cases}$$

$$\boxed{W(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \qquad \det W(x) = \cos^2 + \sin^2 = 1}$$

$$\begin{cases} c_1' = -\frac{\sin x}{\cos x}c_2' = -\operatorname{tg} x\, c_2' \\ \left(\operatorname{tg} x\cdot\sin x + \cos x\right)c_2' = \frac{1}{\cos x} \end{cases}$$

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cancel{\cos x}} \quad c_2' = \frac{1}{\cancel{\cos x}}$$

$$\begin{cases} c_2' = 1 \\ c_1' = -\operatorname{tg} x \end{cases}$$

Una soluzione è: $\begin{cases} c_2 = x \\ c_1 = -\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx \\ \quad = \ln|\cos x| \end{cases}$

$$u_*(x) = \ln|\cos x| \cdot \cos x + x \cdot \sin x$$

è una soluzione particolare di $(*)$.

Tutte le soluzioni di $(*)$ sono: $u = u_0 + u_*$

$$u(x) = \left(a + \ln|\cos x|\right)\cos x + (x+b)\sin x$$

$\square$

Esempio (stesso esercizio fatto con il metodo di similarità)

$$u'' - 3u' + 2u = (x+1)e^{-x}$$

Risolviamo l'omogenea $u'' - 3u' + 2u = 0$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-2)(\lambda-1)$$

$$u_1(x) = e^{x} \qquad u_2(x) = e^{2x}$$

$$u_0(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$$

Cerchiamo una sol. particolare u_* della forma:

$$u_*(x) = c_1(x) \cdot e^{x} + c_2(x) \cdot e^{2x}$$

con c_1 e c_2 che soddisfano:

$$\begin{cases} c_1' e^{x} + c_2' e^{2x} = 0 \\ c_1' e^{x} + 2c_2' e^{2x} = (x+1) e^{-x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2' = -c_1' \cdot e^{-x} \\ c_1' \left(e^{x} - 2 e^{x} \right) = (x+1) e^{-x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1' = -(x+1) e^{-2x} \\ c_2' = (x+1) e^{-3x} \end{cases}$$

$$c_1 = -\int (x+1) e^{-2x} dx = \int x(-e^{-2x}) dx - \int e^{-2x} dx$$

$$= \left[x \frac{e^{-2x}}{2} \right] - \int \frac{e^{-2x}}{2} dx + \frac{e^{-2x}}{2}$$

$$= \frac{x}{2} e^{-2x} + \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{e^{-2x}}{2} = \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4} \right) e^{-2x}$$

$$c_2 = \int x e^{-3x} dx + \int e^{-3x} dx$$

$$= \left[x \frac{e^{-3x}}{-3} \right] - \int \frac{e^{-3x}}{-3} dx + \frac{e^{-3x}}{-3}$$

$$= -\frac{x}{3} e^{-3x} - \frac{e^{-3x}}{9} - \frac{e^{-3x}}{3}$$

$$= -\frac{x}{3}e^{-3x} - \frac{4}{9}e^{-3x}$$

$$u_* = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} = \frac{x}{2}e^{-x} + \frac{3}{4}e^{-x} - \frac{x}{3}e^{-x} - \frac{4}{9}e^{-x}$$

$$= \frac{11+6x}{36}e^{-x}$$

Tutte le soluzioni sono della forma:

$$u(x) = a e^{x} + b e^{2x} + \frac{6x+11}{36}e^{-x}$$

CONFRONTA CON L'ALTRO METODO

OSSERVAZIONE il metodo di similarità poteva essere usato per calcolare gli integrali

Esempio

$$u(x) = \int \underbrace{(x^3+x^2+x+1)e^{-3x}}\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u' = b \\ P(\lambda) = \lambda \end{array}}$$

$$u'(x) = (x^3+x^2+x+1)e^{-3x}$$

$$u(x) = q(x)e^{-3x} \quad \text{con } \deg q(x) \le 3.$$

$$= (ax^3+bx^2+cx+d)e^{-3x}$$

$$u'(x) = (3ax^2+2bx+c-3ax^3-3bx^2-3cx-3d)e^{-3x}$$

$$= (-3ax^3+(3a-3b)x^2+(2b-3c)x+(c-3d))e^{-3x}$$

$$\overset{!}{=} (x^3+x^2+x+1)e^{-3x}$$

$$\begin{cases} -3a = 1 \\ 3a - 3b = 1 \\ 2b - 3c = 1 \\ c - 3d = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{3a-1}{3} = -\frac{2}{3} \\ c = \frac{2b-1}{3} = -\frac{7}{9} \\ d = \frac{c-1}{3} = -\frac{16}{27} \end{cases}$$

$$u(x) = \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{9}x - \frac{16}{27}\right)e^{-3x}$$

$\square$