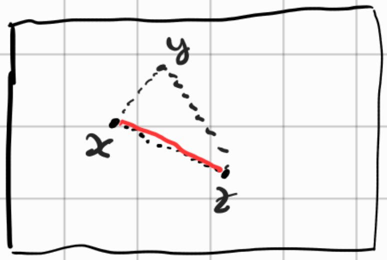
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 64 - 21.3.2025



SPAZIO METRICO

X è un insieme. $d: X \times X \to \mathbb{R}$

è una DISTANZA se valgono le seguenti:

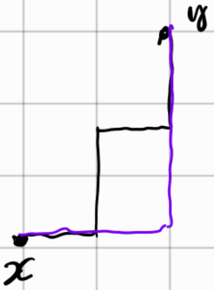
- $d(x,y) \geq 0$ (positività)
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (disuguaglianza triangolare)
- $d(x,y) = 0 \iff x = y$ (separazione)
- $d(x,y) = d(y,x)$ (simmetria)

X munito di una distanza d si dice essere uno spazio METRICO.

Es Su $\mathbb{R}^n$ si definisca la distanza EUCLIDEA

$$d(\underline{x},\underline{y}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

ES (diverso) su $\mathbb{R}^2$: distanza MANHATTAN:



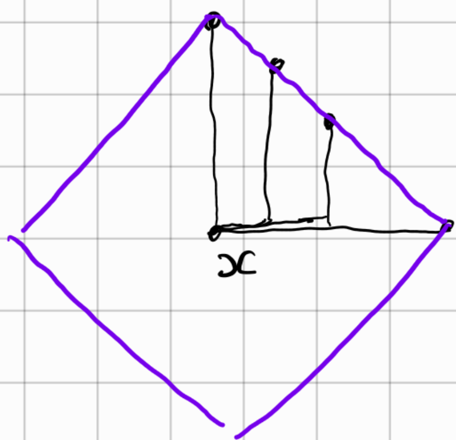
$x = (x_1, x_2)$

$y = (y_1, y_2)$

$$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

Esercizio d_1 è una distanza su $\mathbb{R}^2$

$$B_r(x) = \{ y \in X : d(y,x) < r \}$$



CONVERGENZA, LIMITI, CONTINUITÀ

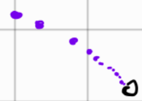
continuità: $f: X \to Y$ è continua in x_0

se $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in X\quad d(x,x_0)<\delta \Rightarrow d(f(x),f(x_0))<\varepsilon$

limiti: .....

convergenza: $x_k \xrightarrow{d} x \iff d(x_k,x)\to 0$

COMPLETEZZA



Successione di Cauchy

$a_n\in X$ si dice essere di Cauchy se:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall k,j>N\quad d(a_k,a_j)<\varepsilon.$$

Teorema: Se $a_n\to a$ allora a_n è di Cauchy.

dim

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \left.\begin{array}{ll}\forall k>N & d(a_k,a)<\varepsilon\\ \forall j>N & d(a_j,a)<\varepsilon\end{array}\right\}\Rightarrow d(a_k,a_j)<2\varepsilon \quad \square$$

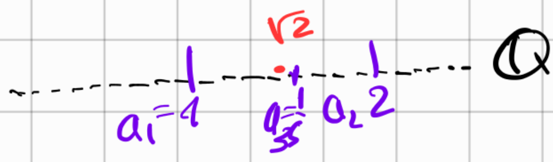
diseg. triangolare.

Es $\mathbb{Q}$, $d(x,y)=|x-y|$ $\quad \mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$

$a_n\in\mathbb{Q}$ $\quad a_n\to\sqrt{2}$ in $\mathbb{R}$ $\quad a_n$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{Q}$

[ad esempio con il metodo di bisezione per risolvere $x^2-2=0$]

ma non converge in $\mathbb{Q}$



Def (COMPLETEZZA)

Uno spazio metrico X si dice essere **COMPLETO** se tutte le successioni di Cauchy convergono.

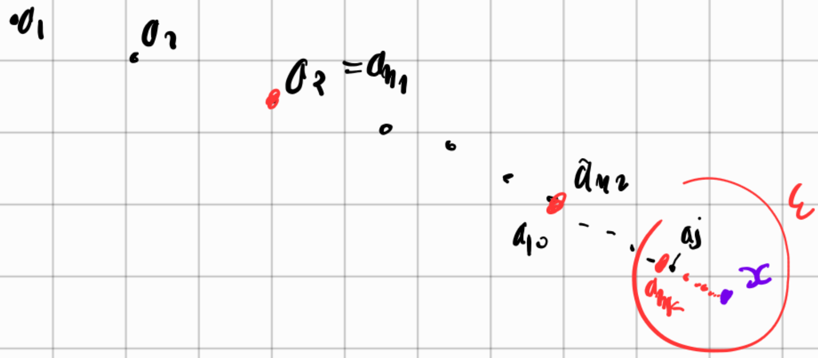
Teorema $\mathbb{R}$ è completo!

Lemma 1 Se a_n è di Cauchy e ha una estratta a_{n_k} convergente $a_{n_k} \to x$ allora $a_n \to x$.

dim

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \text{ t.c. } k, j > N \Rightarrow d(a_k, a_j) < \varepsilon & (a_n \text{ di Cauchy}) \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists M \text{ t.c. } k > M \Rightarrow d(a_{n_k}, x) < \varepsilon & a_{n_k} \to x \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \quad \forall j > n_M \vee N \quad d(a_j, x) \leq d(a_j, a_{n_k}) + d(a_{n_k}, x) \leq 2\varepsilon \qquad \square$$



Lemma 2 Se a_n è di Cauchy allora a_n è LIMITATA

sta dentro una palla

dim a_n di Cauchy

$\varepsilon = 1 \quad \exists N \ \forall k, \forall j > N \ d(a_k, a_j) < \varepsilon = 1$

$$\Downarrow$$

$$d(a_k, a_{N+1}) < \varepsilon = 1$$

a_n sta definitivamente in $B_\varepsilon(a_{N+1})$

$$R = \max\{d(a_1, a_{N+1}),\ d(a_2, a_{N+1}) \dots d(a_N, a_{N+1})\}$$

$$B_R(x_{N+1}) \supseteq \{a_k : k \in \mathbb{N}\} \qquad \square$$

<u>dim</u> (teorema: $\mathbb{R}$ è completo)

Sia a_n di Cauchy: a_n è limitata ← lemma 2

$\Downarrow$ ← Bolzano-Weierstraß

$\exists\, n_k : a_{n_k} \to a$

$\Downarrow$ <u>lemma 1</u>

$a_n \to a$. $\square$

<u>Teorema</u> Anche $\underset{\mathbb{R}^2}{\overset{\mathbb{C}}{\cong}}$ e $\mathbb{R}^n$ sono completi.

<u>dim</u> $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ $\quad \underline{x}_k$ di Cauchy $\Rightarrow$ x_k^j è di Cauchy.

$\underline{x}_k = (x_k^1, x_k^2, \dots x_k^n)$

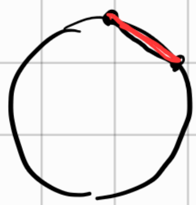
$\Uparrow$

$|x_k^j - x_i^j| \le |\underline{x}_k - \underline{x}_i|$

x_k^j è di Cauchy $\overset{\text{Teo}}{\Rightarrow}$ $x_k^j \to a^j \quad \forall j = 1 \dots n$

$\Rightarrow \underline{x}_k \to \underline{a}$ $\qquad \square$

<u>Esercizio</u> $S^2 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 : d(\underline{x}, 0) = 1\}$



$d_{S^2}(\underline{x}, \underline{y}) = d_{\mathbb{R}^3}(\underline{x}, \underline{y})$ verificare che S^2 <u>è completo</u>

Teorema [delle contrazioni o punto fisso di Banach-Caccioppoli.]

Sia X uno spazio metrico COMPLETO, non vuoto. Sia $f : X \to X$ tale che $\exists\ L < 1$:

$$\forall x, y \in X : \quad d(f(x), f(y)) \le L \cdot d(x, y)$$

[f è una contrazione]

Allora $\exists!\ x \in X$ t.c. $f(x) = x$.

Def $f : X \to Y$ $\quad X, Y$ spazi metrici

f è L-lipschitziana se $\quad (L < +\infty)$

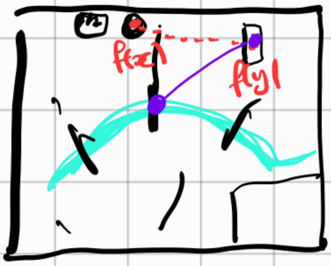
$$\forall x, y \in X \quad d(f(x), f(y)) \le L\, d(x, y)$$

[SOLO SE $L < 1$ diremo che è una contrazione]

In $\mathbb{R}$: $\quad |f(x) - f(y)| \le L\, |x - y|$

$$|f'(c)| \underset{\text{Lagrange}}{=} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \le L$$

ESEMPIO



MAPPA di PISA

$$f : \text{PISA} \longrightarrow \text{CARTA} \subseteq \text{PISA}$$

$\subseteq$ CATTEDRA

è Lipschitz?

SCALA 1:50000 < 1

$$d(f(x), f(y)) = L \, d(x,y)$$

↑ similitudine.

Teorema: c'è un punto fisso: QUI.

Come lo trovo?

a_0 = PONTE di MEZZO

$a_1 = f(a_0)$ ← ponte di mezzo sulla carta

$a_2 = f(a_1)$ ← Fibonacci sulla cart

dim

$$\begin{cases} a_0 \in X & \text{qualunque.} \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$$

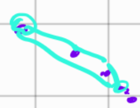
L-Lipschitz

$$d(a_2, a_1) = d(f(a_1), f(a_0)) \leq L \, d(a_1, a_0)$$

$$d(a_3, a_2) = d(f(a_2), f(a_1)) \leq L d(a_2, a_1) \leq L^2 d(a_1, a_0)$$

$$\vdots$$

$$d(a_{k+1}, a_k) = d(f(a_k), f(a_{k-1})) \leq L d(a_k, a_{k-1}) \leq L^k d(a_1, a_0)$$



a_k è di Cauchy?

$$d(a_k, a_{k+j}) \leq d(a_k, a_{k+1}) + d(a_{k+1}, a_{k+2}) + \dots + d(a_{k+j-1}, a_{k+j})$$

$$\leq [L^k + L^{k+1} + \dots + L^{k+j-1}] \cdot d(a_1, a_0)$$

$$= \frac{L^k - L^{k+j}}{1-L} \leq \frac{L^k}{1-L} \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}}$$

$\wedge$

ε per k abbastanza grande.

$\Rightarrow$ a_k è di Cauchy!

X completo $\Rightarrow$ $a_k \to x \in X$

$$\begin{array}{ccc} a_{k+1} & = & f(a_k) \\ \downarrow & \Downarrow & \downarrow \\ x & = & f(x) \end{array} \quad \leftarrow \text{ f è continua!}$$

esercizio

f lipschitz $\Downarrow$ f continua

x è un punto fisso.

UNICITÀ: $\begin{cases} x = f(x) \\ y = f(y) \end{cases}$

$$d(x,y) = d(f(x), f(y)) \le L\, d(x,y) \underset{\text{se } x \neq y}{<} d(x,y)$$ assurdo

$\square$