ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 67 - 28.3.2025

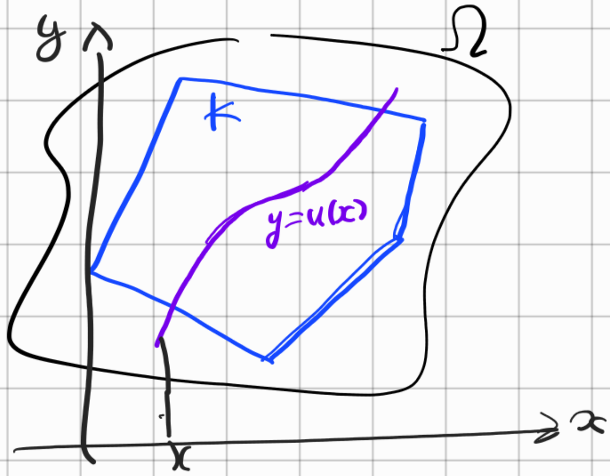
Soluzione MASSIMALE $\qquad u: I \to \mathbb{R}^n$

diremo che una soluzione di una equazione differenziale definita su un intervallo I è massimale (ovvero l'intervallo I è massimale) se non esiste $J \supseteq I$, $J \neq I$, J intervallo, $v: J \to \mathbb{R}^n$ soluzione della stessa equazione che "estende" u: $\qquad v(x) = u(x) \quad \forall x \in I$

Teorema Consideriamo $u'(x) = f(x, u(x))$, $f: \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, f soddisfa le ipotesi di C-L locale.

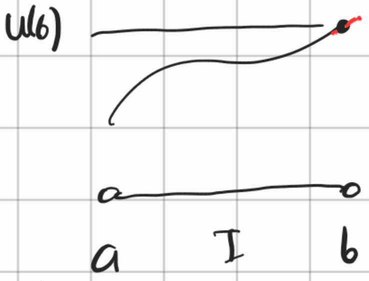
$u: I \to \mathbb{R}^n$ è una soluzione massimale $\iff$ $(x, u(x))$ esce da ogni compatto sia verso destra che verso sinistra.

[K compatto se (in uno spazio metrico) vale Bolzano Weierstrass (ogni $a_k \in K$ ha una estratta $a_{k_j} \to x \in K$) Su $\mathbb{R}^n$ significa chiuso e limitato.]



Idea dim "$\Rightarrow$"

Sia $u: I \to \mathbb{R}^n$ massimale.



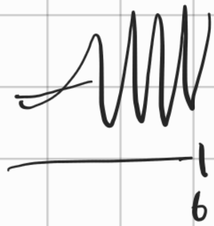
1) $a = \inf I$, $\quad b = \sup I \qquad a, b \notin I$.

se fosse $b \in I$ $\begin{cases} v' = f(x,v) \\ v(b) = u(b) \end{cases}$ avrebbe una unica soluzione in $(b-\delta, b+\delta)$

ma v estende u per unicità ($u \equiv v$ su $(b-\delta, b]$)

$\Rightarrow$ u non sarebbe massimale.

2) $I = (a,b)$. $\lim_{x\to b^-} u(x)$ esiste



[altrimenti $\limsup_{x\to b^-} u(x) > \liminf_{x\to b^-} u(x)$

$\exists\, x_k \to b^-$ tali che $|u'(x_k)| \to +\infty$

$u'(x) = f(x, u(x))$ se fosse $(x, u(x)) \in K$
f è limitata su K (K compatto)
$\Rightarrow u'(x)$ è limitata assurdo.

$u(x) \to y$ per $x \to b^-$

Se fosse $y = \pm\infty$ $(x, u(x))$ esce da K.

Altrimenti posso estendere u in b:

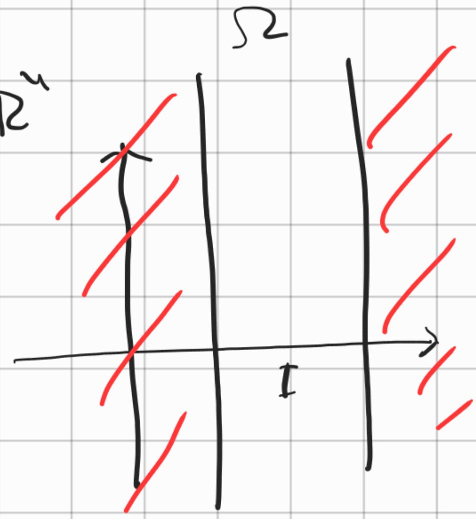
$$u(b) = y$$

$$\lim_{x\to b^-} u'(x) = \lim_{x\to b^-} f(x, u(x)) = f(x,y)$$

$\Rightarrow u'(b)$ esiste e vale $u'(b) = f(x, u(b))$ □

Teorema di esistenza globale.

(*) $u'(x) = f(x, u(x))$ $\qquad f: I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$



def: c'è esistenza globale se ogni soluzione massimale è definita su tutto I.

Se f soddisfa le condizioni di C-L locale e inoltre:

$$|f(x,y)| \le m \cdot |y| + q$$

($\exists\, m, q \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in I$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$ ↑)

Allora c'è esistenza globale.

Esempi $\qquad u' = u^p \qquad f(x,y) = y^p \quad p > 1$

la soluzione, salvo $u=0$, ha un asintoto verticale.

se $p \le 1$ c'è esistenza globale.

Per la dimostrazione ci serve un lemma.

Sia una soluzione massimale

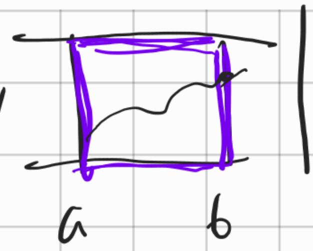
$$|u'(x)| \overset{u \text{ è soluzione}}{=} |f(x, u(x))| \overset{\text{Ipotesi}}{\le} m\,|u(x)| + q$$

Lemma [di Gronwall]

Sia $u : [a,b) \to \mathbb{R}^n$ tale che

$$|u'(x)| \le m\,|u(x)| + q.$$

Allora u è limitata su $[a,b)$.



dim $(x>a)$

$$\left[\ln\left(1+|u(t)|^2\right)\right]_a^x = \int_a^x \frac{2\,u(t)\cdot u'(t)}{1+|u(t)|^2}\,dt$$

$$\le 2\int_a^x \frac{|u(t)|\cdot|u'(t)|}{1+|u(t)|^2}\,dt$$

Ipotesi

$$\le 2\int_a^x \frac{|u(t)|\cdot\left(m|u(t)|+q\right)}{1+|u(t)|^2}\,dt$$

$$\le 2m\int_a^x \underbrace{\frac{|u(t)|^2}{1+|u(t)|^2}}_{\le 1}\,dt + q\int_a^x \frac{2\,\overset{s}{|u(t)|}}{1+|u(t)|^2}\,dt$$

$$\le 2m\,(x-a) + q\cdot(x-a) \overset{x<b}{=} (2m+q)\,(b-a) \quad \square$$

$$\left(\frac{2s}{1+s^2} \le 1 \Leftarrow 2s \le s^2+1 \Leftarrow s^2-2s+1 \ge 0 \Leftarrow (s-1)^2 \ge 0 \right)$$

Es $\quad u' = \sin u \qquad f(x,y) = \sin y$

$\uparrow$

c'è esistenza globale. $\qquad |\sin y| \le |y|$ è sub-lineare

Questioni in sospeso sulle eq. lineari.

le equazioni lineari:

$$(*) \quad u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = b$$

Se $a_1, \dots, a_0, b \in C^0(I, \mathbb{R})$

le soluzioni massimali sono globali ovvero sono definite su tutto I.

(si applica esistenza globale).

Teorema (struttura delle sol. di una EDO lineare)

Sia $V = \{ u : C^n(I, \mathbb{R}) \mid u$ soluzione di $(*)$ $\}$.

Allora V è uno spazio affine di dimensione n.

dim Se $b \neq 0$ $\quad V = u_* + W$

$W = \{$ soluzioni dell'omogenea associata $\}$.

(SAPPIAMO GIA' CHE W è uno sp. vettoriale).

devo mostrare che $\dim W = n$.

Fissato $x_0 \in I$ $\quad J : W \to \mathbb{R}^n$

$$J[u] = \begin{pmatrix} u(x_0) \\ u'(x_0) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

Teo $\exists!$ globale : $\begin{cases} \exists & \text{Dato } y_0 \in \mathbb{R}^n \ \exists\, u \in W : J[u] = y_0 \\ ! & u_1, u_2 \in W \quad u_1 \neq u_2 \Rightarrow J[u_1] \neq J[u_2] \end{cases}$

cioè : $\begin{cases} J & \text{suriettivo} \\ J & \text{iniettivo.} \end{cases}$

$J : W \to \mathbb{R}^n$ bigettiva

isomorfismo di spazi vettoriali.

verifica : J è lineare. $W \leftrightarrow \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \dim W = \dim \mathbb{R}^n = n.$

Wronksiano $u_1 \dots u_n$ funzioni

$$W(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \dots & u_n(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & \dots & u_n'(x) \\ \vdots & & & \\ u_1^{(n-1)}(x) & \dots & & u^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Teo Siano $u_1 \dots u_n$ soluzioni di una equazione diff. lineare omogenea (*).
Allora sono equivalenti

(i) $u_1 \dots u_n$ sono indipendenti

(ii) $\forall x \quad \det W(x) \neq 0.$ $\qquad x \in I$

(iii) $\exists x \quad \det W(x) \neq 0.$

dim (i) $\Rightarrow$ (ii)

$$W(x) = \Big(J(u_1) \ \dots \ J(u_n) \Big)$$

Se $u_1 \dots u_n$ sono indipendenti in $W \Rightarrow J(u_1) \dots J(u_n)$

sono indipendenti in $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow \det \begin{pmatrix} J(u_1) \cdots J(u_n) \end{pmatrix} \neq 0$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ è ovvio. $(I \neq \phi)$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Supponiamo per assurdo $u_1 \dots u_n$ non siano indipendenti: $\exists\, c_1 \dots c_n$ non tutti nulli tali che

$$\text{derivando: } \begin{cases} c_1 \cdot u_1(x) + \dots + c_n u_n(x) = 0 & \forall x. \\ c_1 u_1'(x) + \dots + c_n u_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ c_1 u_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n u_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$$

$$W(x) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \det W(x) = 0 \quad \forall x.$$

$\Downarrow$

non $\exists x : \det W(x) \neq 0$

$\square$

Esistenza globale per eq. di ordine n

$$(*) \quad u^{(n)}(x) = f(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x))$$

$$\underline{v}(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

(*) è equivalente al sistema:

$$\underline{v}'(x) = \begin{pmatrix} v_2(x) \\ v_3(x) \\ \vdots \\ v_n(x) \\ f(x, \underbrace{v_1(x), v_2(x) \dots, v_n(x)}_{v}) \end{pmatrix}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} v_2(x) \\ \vdots \\ v_n(x) \\ f(x, \underline{v}(x)) \end{pmatrix} \right\| \leq m \, |v(x)| + a.$$

$$\Uparrow$$

$$|f(x, \underline{v}(x))| \leq M \cdot |v(x)| + Q$$

$$|v_k(x)| \leq \|v(x)\|$$

$\square$