Prova scritta parziale n. 1
Analisi Matematica 2

Corso di Studi in Matematica

10 dicembre 2025

1. Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = x\sqrt[3]{(y-x)^2}.$$

   (a) Determinare i punti in cui f è continua.

   (b) Mostrare che f non ha né massimo né minimo (globalmente).

   (c) Determinare i punti in cui f è differenziabile.

   (d) Trovare tutti i punti di massimo e minimo locale di f.

2. Si consideri la regione $A \subset \mathbb{R}^3$ definita da

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z + 3 > x^2 + xy + y^2\}.$$

   (a) Mostrare che la funzione $f(p) = |p|$ (la norma) ha minimo ma non ha massimo su ∂A.

   (b) Trovare i punti di ∂A che hanno norma minima.

   (c) Determinare il minimo $z_0 \in \mathbb{R}$ tale che

$$B_1(0,0,z_0) \subset A.$$

Svolgimenti

Es 1. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}^2$. La funzione è continua perché prodotto, somma, composizione di funzioni continue di una variabile. Per lo stesso motivo, la funzione è differenziabile sicuramente in $\mathbb{R}^2 \setminus \{y = x\}$. Analizziamo il comportamento della funzione nei punti della bisettrice.

Nell'origine:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} |h|^{1/3} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)$ e

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$
$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h\sqrt[3]{(k-h)^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\rho\to 0} \rho^{2/3}\,\cos\theta\sqrt[3]{(\sin\theta-\cos\theta)^2} = 0\,.$$

Concludiamo quindi che la funzione è differenziabile in $(0,0)$.

Negli altri punti della bisettrice: in (x_0,x_0) con $x_0 \neq 0$ la derivata parziale in x non esiste, perché non esiste il limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,x_0) - f(x_0,x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)|h|^{2/3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0}{h}\,.$$

La non esistenza del gradiente implica la non differenziabilità in tali punti.

La funzione non ha massimo globale né minimo globale, infatti $f(x,0) = x|x|^{2/3} \to \pm\infty$ per $x \to \pm\infty$.

Cerchiammo i punti di massimo e minimo locale. In $\mathbb{R}^2 \setminus \{y = x\}$, in cui la funzione è differenziabile, non ci sono punti di massimo/minimo locale perché

$$\nabla f = \sqrt[3]{(y-x)^2}\left(\frac{3y-5x}{3(y-x)}\,,\ \frac{2x}{3(y-x)}\right) \neq (0,0)\,.$$

I punti di $\{y = x\,,\ x > 0\}$ sono tutti di minimo locale perché in tali punti $f = 0$ e in un intorno di tali punti $f > 0$. Analogamente, i punti di $\{y = x\,,\ x < 0\}$ sono tutti di massimo locale perché in tali punti $f = 0$ e in un intorno di tali punti $f < 0$. Infine, l'origine non è né un punto di massimo locale né di minimo locale.

Es 2. L'insieme ∂A è chiuso ed è dato da

$$\partial A = \{g = 0\}\,, \quad \text{con} \;\; g(x,y,z) = x^2 + xy + y^2 - z - 3\,.$$

L'insieme ∂A non è limitato, infatti

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (0, n, 3 - n^2) \in \partial A\,, \quad \|(0, n, 3 - n^2)\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty\,.$$

Questa osservazione implica che non esistono punti di massima norma (l'estremo superiore della norma è $+\infty$). Per il teorema di Weierstrass generalizzato, esistono invece punti di minima norma.

Per trovare tali punti, utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: ottimizziamo la funzione $f(x,y,z) = \|(x,y,z)\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$ con il vincolo $g = 0$. Poiché

$$\nabla g(x,y,z) = (2x + y, 2y + x, -1) \neq (0,0,0) \quad \forall (x,y,z)\,,$$

deduciamo che i punti di minimo (che abbiamo dimostrato esistere) soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) = 0\,. \end{cases}$$

per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$. Risolviamo il sistema: osserviamo subito che possiamo sostituire λ con $\lambda/2$ inoltre

$$\begin{cases} x = \lambda(2x + y) \\ y = \lambda(2y + x) \\ z = -\lambda \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x(1 - 2\lambda) = \lambda y \\ y(1 - 2\lambda) = \lambda x \\ z = -\lambda \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Il primo punto critico vincolato è $P_1 = (0,0,-3)$ in cui $f = 9$. Se $(x,y) \neq (0,0)$, allora $\lambda \neq 0$ e $\lambda \neq 1/2$ e dalle prime due equazioni deduciamo che

$$\frac{\lambda}{1 - 2\lambda} = \frac{1 - 2\lambda}{\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 = (1 - 2\lambda)^2 \quad \leftrightarrow \quad (\lambda - 1)(\lambda - 1/3) = 0\,.$$

Se $\lambda = 1$, allora $z = -1$, $x = -y$. Da $g = 0$ deduciamo che $x = \pm\sqrt{2}$ e $y = \mp\sqrt{2}$. Due punti critici vincolati sono quindi $P_2, P_3 = \pm(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}, -1)$. Inoltre

$$f(P_2) = f(P_3) = 5\,.$$

Se $\lambda = 1/3$, allora $z = -1/3$, $x = y$. Da $g = 0$ deduciamo che $x = y = \pm 2\sqrt{2}/3$. Gli altri due punti critici vincolati sono quindi $P_4, P_5 = (\pm 2\sqrt{2}/3, \pm 2\sqrt{2}/3, -1/3)$, in cui f vale

$$f(P_4) = f(P_5) = \frac{17}{9}\,.$$

Concludiamo quindi che i due punti di minima norma sono P_3 e P_4.

Un punto $P \in A$ della forma $P = (0, 0, z_0)$ che soddisfa

$$B_1(P) \subset A$$

deve necessariamente soddisfare

$$\mathrm{dist}(P, \partial A) \geq 1\,.$$

La distanza di P da ∂A si calcola come nel punto precedente, minimizzando la funzione $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - z_0)^2$ su $\{g = 0\}$.

Osserviamo che z_0 sicuramente soddisfa $z_0 \geq -2$, perché il punto $(0, 0, -3)$ è il punto dell'asse z con coordinata z inferiore in ∂A.

Ripetendo il ragionamento troviamo:

- $Q_1 = (0, 0, -3)$, $h(Q_1) = (-3 - z_0)^2 = 9 + z_0^2 + 6z_0$;
- ricordando che $z_0 \geq -2$, $Q_{2,3} = (\sqrt{z_0 + 2}, -\sqrt{z_0 + 2}, z_0 - 1)$, $h(Q_{2,3}) = 2z_0 + 9$;
- $Q_{4,5} = (\sqrt{8/9 + z_0/3}, \sqrt{8/9 + z_0/3}, -1/3 + z_0)$, $h(Q_{4,5}) = 17/9 + 2z_0/3$.

La distanza di P da ∂A è il minimo tra questi 3 numeri. Ora, affinché la distanza sia ≥ 1 è necessario che tutti e 3 i numeri siano ≥ 1.

È facile verificare che ciò è vero per $z_0 \geq -4/3$. E la distanza minima in tal caso è raggiunta da $Q_{4,5}$. Il punto con coordinata verticale inferiore è proprio

$$P = (0, 0, -4/3)\,.$$