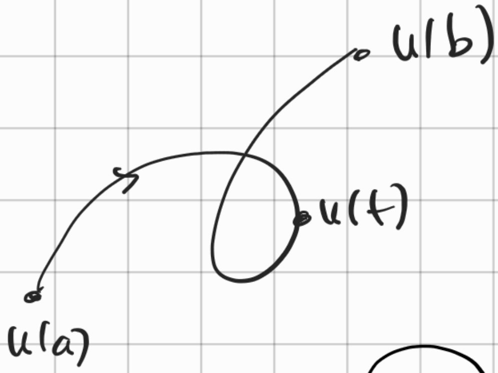
ANALISI MATEMATICA 2. LEZIONE 32 / 15.12.2025

CURVE

(per noi)

$u : [a,b] \to X$, X sp. metrico $X = \mathbb{R}^n$

$t \mapsto u(t)$

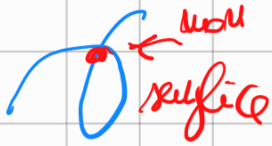


u è una curva parametrizzata

<u>def</u> u è <u>chiusa</u> (curva chiusa)

se $u(a) = u(b)$

<u>def</u> u è <u>semplice</u> se u è iniettiva

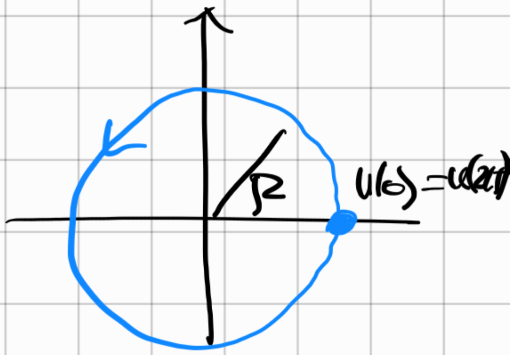


(salvo $u(a) = u(b)$ per le curve chiuse)

<u>Es</u> $u : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $R > 0$

$u(t) = (R\cos t, R\sin t)$

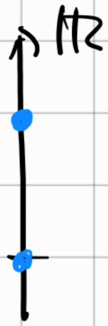
u è semplice, chiusa

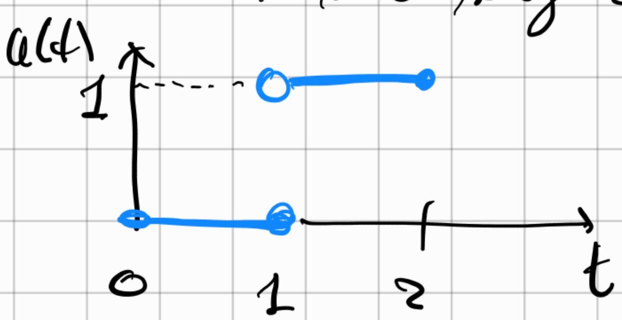


<u>Es</u> $u : [0,2] \to \mathbb{R}$

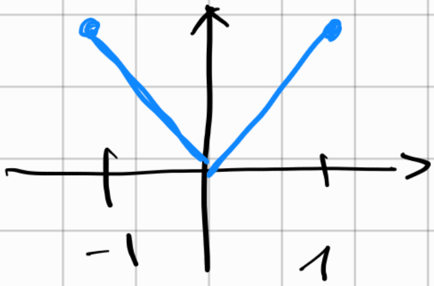
non è semplice.

$u \notin C^0$



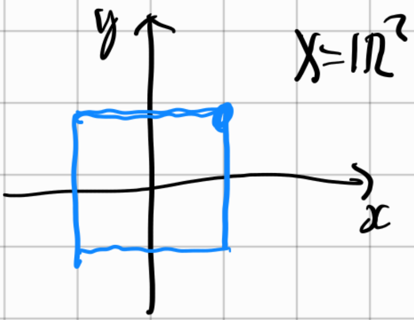


Es $u : [-1,1] \to \mathbb{R}$ $\qquad u(x) = |x|$

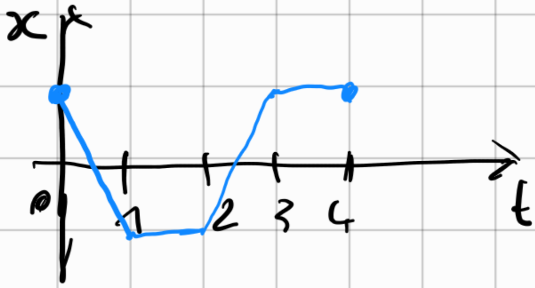


Def Il supporto di $u : [a,b] \to X$ è $\mathrm{Im}\, u = u([a,b])$ a volte si denota con $[u]$. Posso avere curve diverse con lo stesso supporto.

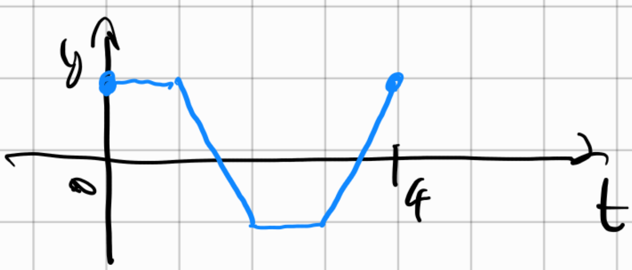
Es



$u(t) = (x(t), y(t))$



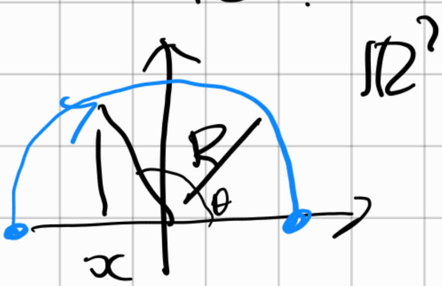
$u : [0,4] \to \mathbb{R}^2$



è semplice, chiusa $\qquad u \in C^0 \setminus C^1$.

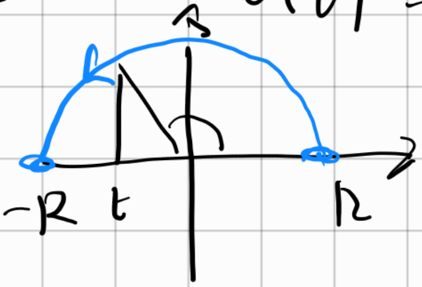
Es $u(x) = \left(x, \sqrt{R^2 - x^2}\right)$

$u : [-R, R] \to \mathbb{R}^2$



è una "riparametrizzazione" di

$v : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2 \qquad v(\theta) = (R\cos\theta, R\sin\theta)$



$[u] = [v]$

$$u(x) = v(\theta(x)) \qquad \boxed{u = v \circ \varphi}$$

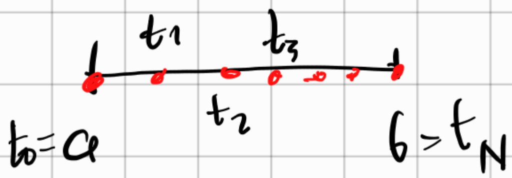
con: $\theta = \varphi(x) = \arccos \frac{x}{R}$

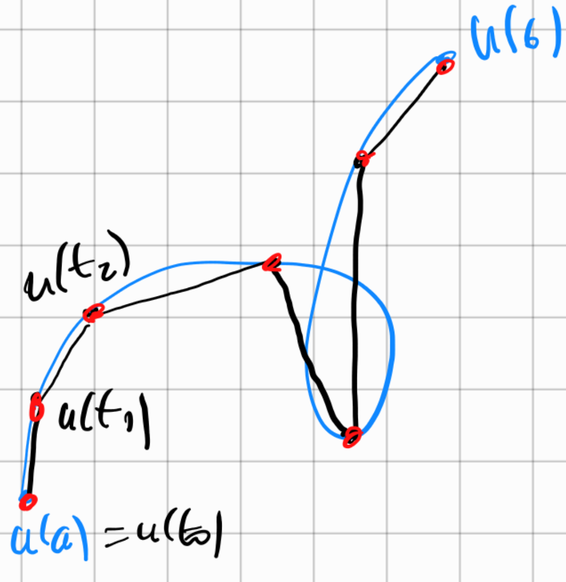
$$\begin{tikzcd} \overset{x}{[-R, R]} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \overset{\theta}{[0, \pi]} \arrow[dl, bend left, "v"] \\ \mathbb{R}^2 & \end{tikzcd}$$

LUNGHEZZA

$u : [a, b] \to X$

idea:





$\ell(u) = \sup\{$ lunghezze delle poligonali iscritte $\}$

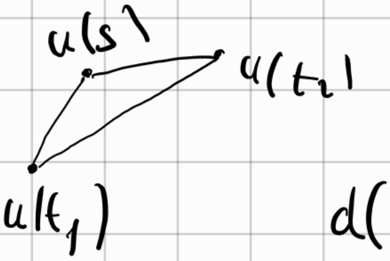
POLIGONALI: corrispondono ad un sottoinsieme $I \subseteq [a,b]$, I finito.

$I = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_N\}$, $a \le t_0 < t_1 < \dots < t_N \le b$

$$\ell(u) := \ell(u,a,b) := \sup_{\substack{I \subseteq [a,b] \\ I \text{ finito}}} \underbrace{\sum_{k=1}^{N} d(u(t_{k-1}), u(t_k))}_{\ell_I(u)}$$

Oss $I \subseteq J \Rightarrow \ell_I(u) \le \ell_J(u)$. (se aggiungo punti la lunghezza aumenta)

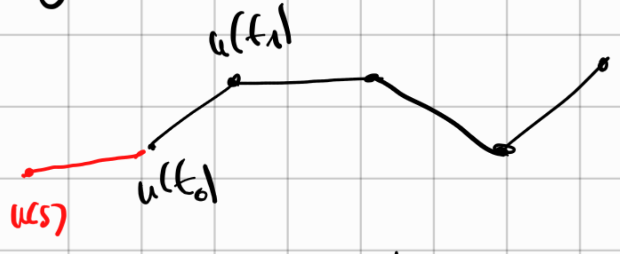
si dimostra per induzione su N usando la disuguaglianza triangolare



$t_1 \le s \le t_2$

$$d(u(t_1), u(t_2)) \le d(u(t_1), u(s)) + d(u(s), u(t_2))$$

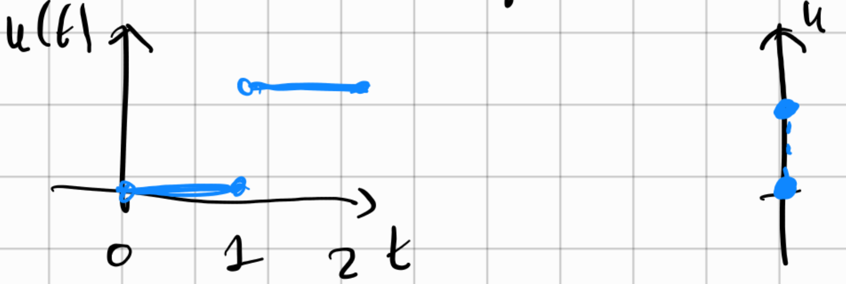
lo stesso se aggiungo punti all'inizio o alla fine.



Posso supporre $t_0 = a$, $t_N = b$.

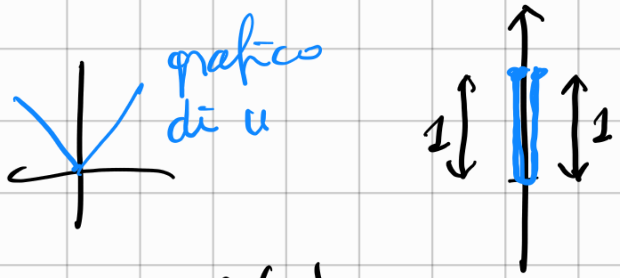
Es

⚠ se u non è continua sto contando anche la lunghezza dei salti:



$\ell(u) = 1$

⚠ $u(t) = |t|$

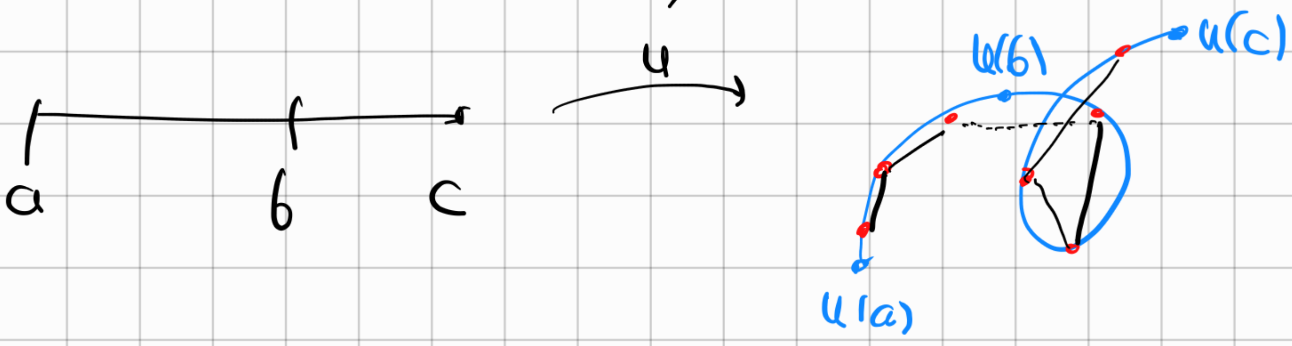


$u: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $\ell(u) = 2$

PROPRIETA'

additività: $\ell(u, a, b) + \ell(u, b, c) = \ell(u, a, c)$

se $u: [a, c] \to X$, $b \in [a, c]$



dim

se $I \subseteq [a, b)$ $J \subseteq [b, c]$

(1) $\ell_I(u) + \ell_J(u) \leq \ell_{I \cup J}(u) \leq \ell(u)$ è il sup

Viceversa se $I \subseteq [a, c]$, $I' = I \cup \{b\}$

$\ell_I(u) \leq \ell_{I'}(u) = \ell_{I' \cap [a,b]}(u) + \ell_{I' \cap [b,c]}(u)$

$$\Rightarrow \quad \ell(u,a,c) \leq \ell(u,a,b) + \ell(u,b,c)$$

LA LUNGHEZZA CONTA ANCHE LA "MOLTEPLICITÀ" (se la curva non è semplice).

Se $X = \mathbb{R}^n$ $u(t)$ è la traiettoria di un punto

$u(t)$ = posizione al tempo t

allora mi aspetto:

$$\ell(u,a,b) = \text{spazio percorso per } t \in [a,b]$$

$$= \text{integrale della velocità scalare}$$

$$= \int_a^b |u'(t)|\, dt$$

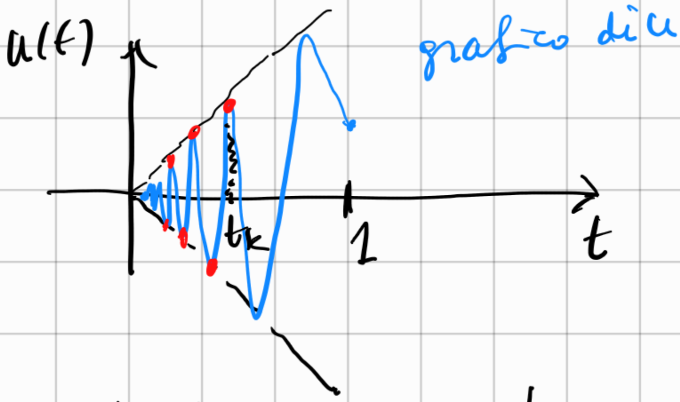
Teo Sia $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1, di lunghezza finita. Allora $\ell(u,a,b) \overset{(*)}{=} \int_a^b |u'(t)|\, dt$.

Def Se $\ell(u) < +\infty$ diremo che u è rettificabile.

Esempio $u : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$u(t) = \begin{cases} t \sin \frac{1}{t} & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

è continua MA $\ell(u) = +\infty$



$$\ell(u) \geq \sum \left| u(t_{k-1}) - u(t_k) \right|$$

dove t_k sono tali che

$$\sin \frac{1}{t_{2k}} = 1 \quad , \quad \sin \frac{1}{t_{2k+1}} = -1$$

$$\frac{1}{t_{2k}} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \frac{1}{t_{2k+1}} = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$

$$t_k \sim (-1)^k \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

$$\sum_{k=1}^{N} \left| u(t_{k-1}) - u(t_k) \right| \geq \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \xrightarrow{N \to +\infty} +\infty$$

---

dim (del teorema) $u \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$
$u' \in C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$

1 | DIMOSTRO ≥ ineq. (*)

$\Rightarrow u'$ è uniformemente continua.

FISSIAMO $\varepsilon > 0$.

$$\exists \delta > 0 \quad |t-s| < \delta \Rightarrow |u'(t) - u'(s)| < \varepsilon$$

$|u'|$ è C^0 quindi è R-integrabile su $[a,b]$

$$\exists \quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b \quad \text{con} \quad |t_{k-1} - t_k| < \delta$$

per cui:

$$\int_a^b |u'(t)|\,dt \leq \sum_{k=1}^N \inf_{t\in[t_{k-1},t_k]} |u'(t)| \cdot (t_k - t_{k-1}) + \varepsilon$$

$$\leq \sum_{k=1}^N |u'(t_{k-1})| \cdot (t_k - t_{k-1}) + \varepsilon$$

costante

$$= \sum_{k=1}^N \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t_{k-1})\,dt \right| + \varepsilon$$

UNIFORME CONTINUITÀ

$|u'(t_{k-1}) - u'(t)| < \varepsilon$

$$\leq \sum_{k=1}^N \left[\left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt \right| + \varepsilon(t_k - t_{k-1}) \right] + \varepsilon$$

$$= \sum_{k=1}^N |u(t_k) - u(t_{k-1})| + \varepsilon(b-a) + \varepsilon$$

$$\leq \ell(u,a,b) + \varepsilon(b-a) + \varepsilon$$

per $\varepsilon \to 0$ si ottiene $\displaystyle\int_a^b |u'(t)|\,dt \leq \ell(u,a,b)$.

2 DIMOSTRO $\leq$

$$\ell(u,a,b) = \sup_{t_0<\dots<t_N} \underbrace{\sum_{k=1}^{N} |u(t_{k-1})-u(t_k)|}$$

$$\sum_{k=1}^{N} |u(t_{k-1})-u(t_k)| = \sum_{k=1}^{N} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |u'(t)|\,dt = \int_{t_0}^{t_N} |u'(t)|\,dt$$

$$\leq \int_a^b |u'(t)|\,dt \qquad \square$$

ESERCIZI sul CALCOLO della LUNGHEZZA LI AVETE GIA' FATTI AD ANALISI UNO!

$$\ell(u) = \int_a^b |u'(t)|\,dt.$$

RIPARAMETRIZZAZIONI:

$$\begin{tikzcd} {[a,b]} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "v"', "u\circ\varphi"] & {[A,B]} \arrow[dl, "u"] \\ \mathbb{R}^n & \end{tikzcd}$$

$u:[A,B]\to\mathbb{R}^n$

$v:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, $v = u\circ\varphi$

Se $u \in C^1$, $\varphi \in C^1$, φ è bigettiva
$$\Downarrow$$
(φ monotona)

$$\ell(u, A, B) = \int_A^B |u'(t)|\,dt \underset{\substack{t=\varphi(s)\\ dt=\varphi'(s)ds}}{=} \int_{\varphi^{-1}(A)}^{\varphi^{-1}(B)} |u'(\varphi(s))|\,\varphi'(s)\,ds$$

se φ è crescente $\quad \varphi'(s) = |\varphi'(s)|$, $\varphi^{-1}(A) \le \varphi^{-1}(B)$

$$\ldots = \int_a^b |u'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)|\,ds$$

$$= \int_a^b |(u\circ\varphi)'(s)|\,ds = \ell(u\circ\varphi, a, b)$$

se φ è decrescente $\quad \varphi'(s) = -|\varphi'(s)|$ ma gli estremi sono scambiati. Quindi ottengo lo stesso risultato:

$$\ell(u, A, B) = \ell(u\circ\varphi, a, b)$$