

ANALISI MATEMATICA 2

LEZIONE 33 - 16.12.2025

CURVE

$$u: [a, b] \rightarrow X \text{ sp. metrico}$$

$$l(u) = l(u, a, b) = \text{lunghezza della curva}$$

$$= \sup \{ \text{lunghezze poligonali} \}$$
$$u \in C^1$$
$$= \int_a^b |u'(t)| dt$$

OBIETTIVO: dimostrare che esistono le "geodetiche"

$$X = S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$$



Su S^2 c'è la distanza "euclidea" indotta da $\mathbb{R}^3$.

$d(p, q) = |p - q|$ è la lunghezza di un segmento che non sta in S^2 .

distanza geodetica: X sp. metrico

$$d_g(p, q) = \inf \left\{ l(u) \mid u: [0, 1] \rightarrow X, u \text{ continua} \right. \\ \left. u(0) = p, u(1) = q \right\}$$

Questioni:

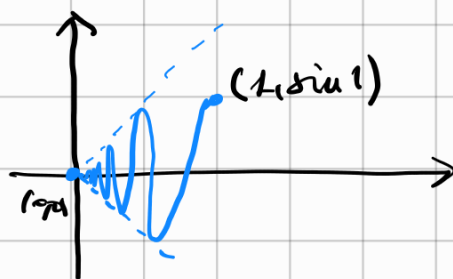
- ① $d_g(p, q) < +\infty$ (se X non è connesso
 $\Downarrow$
 X non è connesso per archi
 $\Downarrow$
 X non è connesso per archi rettificabili)

Es X connesso per archi ma non di lunghezza finita.

$$X = \left\{ (x, x \sin \frac{1}{x}) : x \in (0, 1] \right\}$$

$$d_g((0,0), (\varepsilon, \sin \frac{1}{\varepsilon})) = +\infty$$

(VEDI LEZIONE SCORSA)



MOTIVAZIONE

Teo X sp. metrico ^{proprio} completo, connesso per archi rettificabili.

(proprio: i chiusi e limitati sono compatti).

Allora X è connesso per archi geodetici.

dati $x, y \in X$ esiste una geodetica che connette x a y
 cioè $u \in C^0([0, 1], X)$, $u(0) = x$, $u(1) = y$, $l(u) = d_g(x, y)$.

[l^2 è Hilbert $\Rightarrow$ metrico completo ma non proprio]

$e_n = (0, \dots, 0, \underset{\uparrow n}{1}, 0, \dots)$ $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$

Idea: METODO DIRETTO DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI (T. Weierstraß)

$f: X \rightarrow \mathbb{R}$ prendo x_n successione minimizzante

cioè $f(x_n) \rightarrow \inf f(X)$

metto su X una topologia tale che:

(completezza) (1) x_n ha una estratta convergente (Bolzano-Weierstraß)

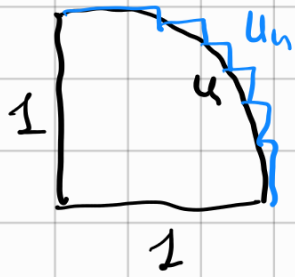
$x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$

f è s.c.i (semi continua inferiormente).

(semi-continuità) (2) $f(\bar{x}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \inf f(X)$

Allora $\bar{x}$ è minimo di f su X .

Nota se $u_k \rightrightarrows u$ non è detto che $l(u_k) \rightarrow l(u)$



$$l(u_n) = 2$$

$$l(u) = \frac{\pi}{2} < 2$$

l non è continua ma è s.c.i.

$$l(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} l(u_n)$$

Teo se $u_n: [a, b] \rightarrow X$ ^{sp. metrico} sono continue,

$$\boxed{u_n \rightrightarrows u} \quad (\text{convergenza uniforme})$$

$$u: [a, b] \rightarrow X \quad (u \text{ continua})$$

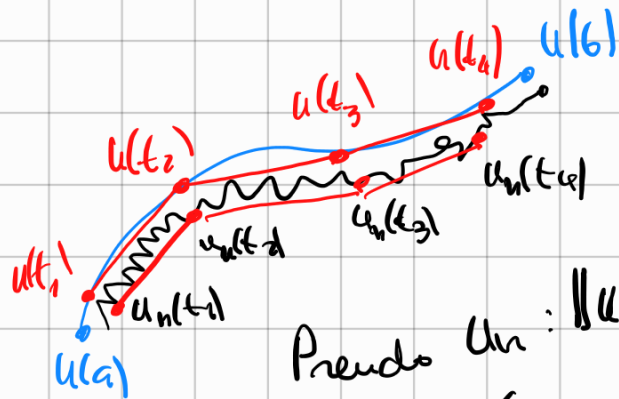
$$\text{allora } l(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} l(u_n).$$

dim

$$\forall \varepsilon > 0$$

$\forall$ poligonale:

$$u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_N)$$



$$\text{Prendo } u_n: \|u_n - u\|_\infty < \frac{\varepsilon}{N}$$

la poligonale ha lunghezza $\leq l(u_n) + \varepsilon$.

$$(l(u) \leq \liminf l(u_n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N: l(u) \leq l(u_n) + \varepsilon)$$

□

C'È SEMICONTINUITÀ. C'È COMPATTEZZA?

Cioè come sono fatti i compatti nello spazio C^0 con la distanza uniforme?

Teo (Ascoli-Arzelà)

$u_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ successione di funzioni tali che:

(i) u_n sono ^(uniformemente) equicontinue:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x, y, n \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |u_n(x) - u_n(y)| < \epsilon$$

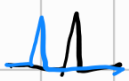
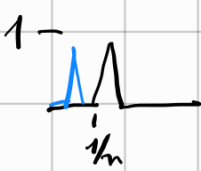
(ii) u_n sono ^{equilimitate}:

$$\exists R: \forall x, n \quad |u_n(x)| \leq R.$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{OVERO} \\ \|u_n\|_{\infty} \leq R \end{array} \right]$$

Allora esiste una sottostratta u_{n_k} , esiste $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$u_{n_k} \Rightarrow u \quad (\text{converge uniformemente}).$$

(Controesempio:   $\nLeftarrow$ è equilimitata) ma $\|u_n - u_m\|_{\infty} = 1$

non ha sottostratte convergenti, non è equicontinua!



dim Visto che $u_n: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$

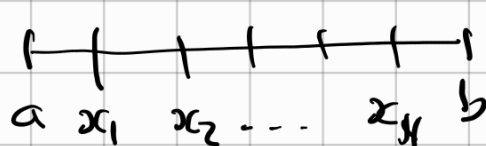
sappiamo che $C^0([a,b])$ è completo

Basta mostrare che u_n ha una sottostratta u_{n_k} di Cauchy:

Test: $\forall \varepsilon > 0 \exists N: k, j > N: \|u_{n_k} - u_{n_j}\|_\infty < \varepsilon$.

Pero 1 (i) $\exists \delta > 0$ t.c. $|x-y| \leq \delta \Rightarrow |u_n(x) - u_n(y)| < \varepsilon$

Prendiamo $N > \frac{b-a}{\delta}$, $x_1, \dots, x_N$ equidistanti su $[a,b]$



$$x_k - x_{k-1} \leq \delta$$

anzi $(u_n(x_1), u_n(x_2), \dots, u_n(x_N)) \in \mathbb{R}^N$ è limitata.
ha una
stratta convergente per Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}^N$.

$u_{n_k}(x_m)$ converge per ogni m .

Per k abbastanza grande: $|u_{n_k}(x_m) - u_{n_j}(x_m)| < \varepsilon$
e $j > k$

Ora dato $x \in [a,b]$, m.t.c. $|x_m - x| \leq \delta$

$$\begin{aligned} |u_{n_k}(x) - u_{n_j}(x)| &\leq |u_{n_k}(x) - u_{n_k}(x_m)| + |u_{n_k}(x_m) - u_{n_j}(x_m)| \\ &\quad + |u_{n_j}(x_m) - u_{n_j}(x)| \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \text{equicontinuit\`a} \quad \text{convergenza nel "reticolo"} \end{array}$$

$$\|u_{n_k} - u_{n_j}\|_{\infty} \leq 3\varepsilon.$$

Abbiamo mostrato che $\forall \varepsilon > 0$ esiste n_k tale che $\|u_{n_k} - u_{n_j}\| < \varepsilon$

Pono 2 (argomento diagonale)

$$\varepsilon = \frac{1}{n}$$

estretto $\left(\begin{array}{cccc} n_1^1 & n_2^1 & n_3^1 & \dots \\ n_1^2 & n_2^2 & n_3^2 & \dots \\ n_1^3 & n_2^3 & n_3^3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right)$

$$\|u_{n_k^1} - u_{n_j^1}\| < 1$$

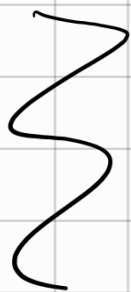
$$\|u_{n_k^2} - u_{n_j^2}\| < \frac{1}{2}$$

$$\| \quad \quad \quad \| < \frac{1}{3}$$

Allora $u_{n_k^k}$ soddisfa la condizione

$$\text{di Cauchy: } j > k \quad \|u_{n_k^k} - u_{n_j^j}\| \leq \frac{1}{k}$$

□



ASTRAENDO:

Teo $u_n: X \rightarrow Y$, X sp. metrico compatto, Y spazio metrico

(i) u_n sono equicontinue

(ii) $\forall x \in X$ $\{u_n(x)\}$ è relativamente compatto
(cioè la diuisura è compatta).

Alora $\exists n_k$ t.c. $u_{n_k} \rightrightarrows u$
 $\exists u: X \rightarrow Y$

dim Stessa dimostrazione! Usando la totale limitatezza di X si ottiene un "reticolo" $x_1 \dots x_N$.

Idea per concludere l'esistenza delle geodetiche!

$$l(u_n) \rightarrow \inf = L \quad u_n: [0,1] \rightarrow X$$

a meno di riparametrizzare "

$u_n(t)$ si muove a velocità costante "

$$l(u_n, t_1, t_2) \leq 2L \cdot |t_1 - t_2| \Rightarrow \frac{d(u_n(t_1), u_n(t_2))}{|t_1 - t_2|} \leq 2L$$

$\Rightarrow$ sono equicontinue

$$\delta = \frac{2\varepsilon}{L}$$
