

# ANALISI MATEMATICA 2

## LEZIONE 34 - 25.2.2026

### INTEGRALI MULTIPLI

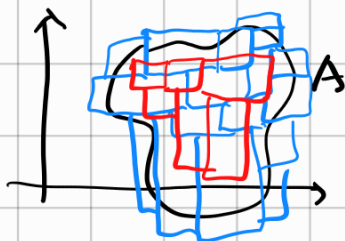
• INTEGRALE di RIEMANN

~~LEBESGUE~~

• MISURA di PEANO-JORDAN

Alternativa 1

POLIRETTANGOLI  
CARTESIANI



Cosa mi aspetto da  
una misura  $\mu$ ?

Area rettangolo = base  $\times$  altezza  
cartesiani

additività

$$\mu(Q) = 1 \quad Q = [0,1]^n$$

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

$$\text{se } A \cap B = \emptyset$$

monotonia

$$A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$

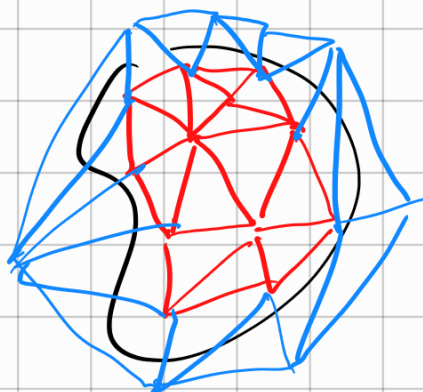
approssimazione  
interna

$$\mu(A_{\text{int}}) \leq \mu(A) \leq \mu(A^*)$$

$A^*$  approssimazione  
esterna

Alternativa 2

POLIEDRI



equidecomponibilità

Teorema di Bolyai



Nostra alternativa:

CUBI DIADICI

in  $\mathbb{R}^n$

$$\underline{k} \in \mathbb{Z}^n, \quad N \in \mathbb{N}$$

$$Q_{\underline{k}}^N := \frac{\underline{k} + [0,1]^n}{2^N}$$



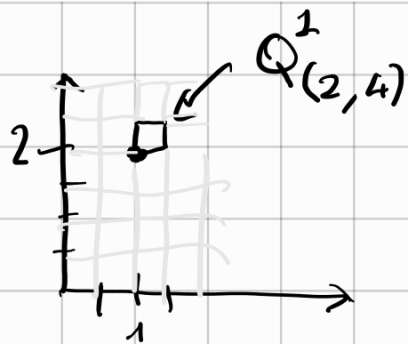
$Q_{\underline{k}}^N$  è un cubo n-dimensionale

di lato  
reticle

$$2^{-N}$$

con un

$$\frac{\underline{k}}{2^N}$$



$N=1$  scala  
 $\underline{k}=(2,4)$  posizione

Definizione (integrale di Riemann, cubi diadici)

Sia  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata con supporto limitato.

$$\hookrightarrow \text{spt } f = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$$

$$S^N(f) \doteq 2^{-nN} \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^n} \sup(f(Q_{\underline{k}}^N))$$

$$S_N(f) \doteq 2^{-nN} \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^n} \inf(f(Q_{\underline{k}}^N))$$

oss 1 queste somme sono finite perché  $f$  è nulla

in tutti i cubetti tranne un numero finito

(spt  $f$  è limitato)

oss 2

sup e inf sono finiti perché  $f$  è limitata.

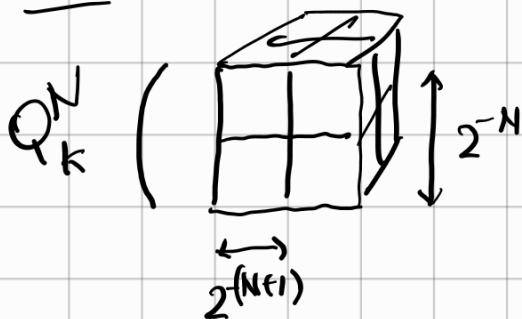
$$S^N(f) \in \mathbb{R}, \quad S_N(f) \in \mathbb{R}$$

Oss 3

$$N \mapsto S^N(f)$$

$\bar{e}$  decrescente

$$S^{N+1}(f) \leq S^N(f)$$



$$2^{-Nm} = 2^n \cdot 2^{-(N+1)n}$$

$$2^{-mN} \sup f(Q_k^N) \geq 2^{-n(N+1)} \sum_j \sup f(Q_j^{N+1})$$

$Q_j^{N+1} \subseteq Q_k^N$

$\uparrow$

$2^n$  cubetti

$$\sup f(Q_k^N) \geq \sup f(Q_j^{N+1})$$

viceversa

$$N \mapsto S_N(f)$$

$\bar{e}$  crescente

$$S^{N+1}(f) \geq S^N(f)$$

$$S^*(f) = \inf_N S^N(f) = \lim_{N \rightarrow +\infty} S^N(f)$$

$$S_*(f) = \sup_N S_N(f) = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)$$

Se  $S^*(f) = S_*(f)$  diremo che  $f$

$\bar{e}$   $\mathbb{R}$ -integrabile (Riemann integrabile)

e scriviamo

$$\int f = S^*(f) = S_*(f)$$

Notazione

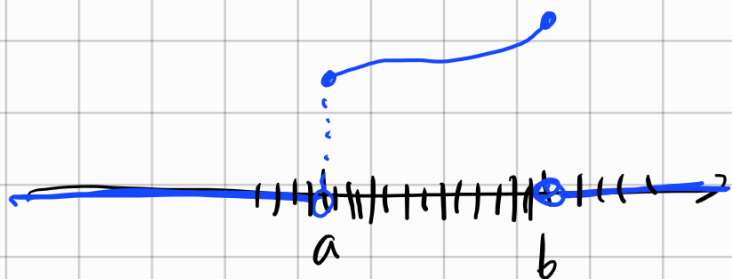
$$\int f = \int f(\underline{x}) d\underline{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\underline{x}) d\underline{x}$$

oss 1. Se  $n=1$  questo coincide con  
l'usuale integrale di Riemann

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Lemma (monotonia) Siano  $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

limitate, con supporto limitato e

$\mathbb{R}$ -integrabili. Se  $f \leq g$  allora  $\int f \leq \int g$

dim  $\forall N \forall k \quad \sup f(Q_k^N) \leq \sup g(Q_k^N)$

$$S^N(f) \leq S^N(g)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\int f \leq \int g \quad \square$$

Teorema (linearità) Se  $f, g$  sono misure  $\mathbb{R}$ -integrabili  
 anche  $f+g$  e  $c f$   $\forall c \in \mathbb{R}$  sono  $\mathbb{R}$ -integrabili

$$\int (f+g) = \int f + \int g$$

$$c \in \mathbb{R} \quad \int c f = c \int f.$$

(Ovvero  $\int : \{ \mathbb{R}\text{-integrabili} \} \rightarrow \mathbb{R}$  è lineare)

lim

$$\sup (f+g)(Q_k^N) \leq \sup f(Q_k^N) + \sup g(Q_k^N)$$

$$\inf (f+g)(Q_k^N) \geq \inf f(Q_k^N) + \inf g(Q_k^N)$$

$\Downarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} S^N(f+g) \leq S^N(f) + S^N(g) \\ S_N(f+g) \geq S_N(f) + S_N(g) \end{cases} \quad \begin{matrix} \inf f \leq \sup f \\ \Downarrow \\ S_N \leq S^N \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{S_*(f) + S_*(g) \leq S_*(f+g) \leq S^*(f+g) \leq S^*(f) + S^*(g)}_{\text{#}} \quad \text{#}$$

$$\Rightarrow S_*(f+g) = S^*(f+g) \Rightarrow f+g \in \mathbb{R}\text{-int.}$$

$$\text{e } \int f+g \stackrel{\#}{=} \int f + \int g$$

seconda parte

$cf$  con  $c \geq 0$

$$S^N(cf) = c S^N(f)$$

$$\sup cf = c \sup f$$

$$S_*(cf) = c S_*(f)$$

$$\inf cf = c \inf f$$

$$\dots S_x^*(cf) = c S_x^*(f)$$

$cf$  è  $\mathbb{R}$ -integrabile e  $\int cf = c \int f$ .

$c = -1$

$$\sup_{\inf} (-f) = -\inf_{\sup} f$$

$$\dots S^*(-f) = -S_*(f)$$

$\Rightarrow -f$  è  $\mathbb{R}$ -int. e  $\int (-f) = -\int f$ .

□

Teorema (proprietà di reticolo)

Se  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è limitato, con supporto limitato,  $\mathbb{R}$ -integrabile. Allora anche  $|f|, f^+, f^-$

sono  $\mathbb{R}$ -integrabili.

$$x \in \mathbb{R} \quad x^+ = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{l} x^- = \begin{cases} -x & \text{se } x \leq 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases} \\ x = x^+ - x^- \\ |x| = x^+ + x^- \end{array} \right] = x \vee 0$$

Inoltre

$$|\int f| \leq \int |f| = \int f^+ + \int f^-$$

$$\int f = \int f^+ - \int f^-$$

$\uparrow$  LINEARITA'.

dim

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(y)|$$

$$|\sup |f| - \inf |f| \leq |\sup f - \inf f|$$

$$S^N(|f|) - S_N(|f|) \leq S^N(f) - S_N(f)$$

$$0 \leq S^*(|f|) - S_*(|f|) \leq S^*(f) - S_*(f) = 0$$

$|f|$  è  $\mathbb{R}$ -integrabile.

$$\begin{cases} f^+ = \frac{|f| + f}{2} \\ f^- = \frac{|f| - f}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow f^+, f^-$  sono  $\mathbb{R}$ -integrabili

Inoltre

$$\begin{aligned} |\int f| &= |\int f^+ - \int f^-| \leq |\int f^+| + |\int f^-| \\ &= \int f^+ + \int f^- = \int f^+ + f^- = \int |f|. \end{aligned}$$

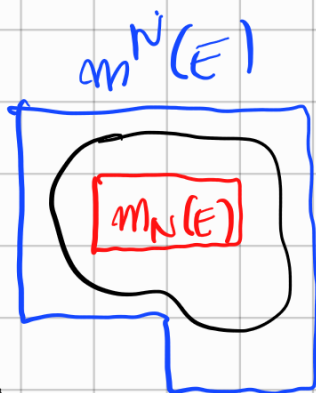
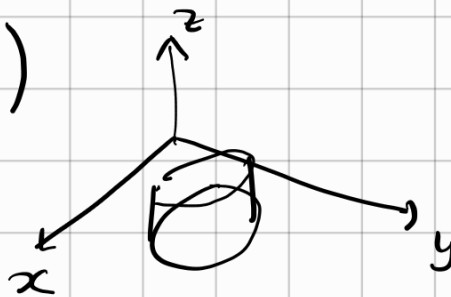
□

Definizione Dato  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  limitato y definiamo

$$m^N(E) := S^N(\mathbb{1}_E)$$

$$\mathbb{1}_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

$$m_N(E) := S_N(\mathbb{1}_E)$$



$$\sup \mathbb{1}_E(Q_k^N) = \begin{cases} 1 & \text{se } Q_k^N \cap E \neq \emptyset \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\inf \mathbb{1}_E(Q_k^N) = \begin{cases} 1 & \text{se } Q_k^N \subseteq E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$m_*^*(E) = S_*^*(\mathbb{1}_E)$$

Dimo che  $E$  è P-J misurabile (Peano-Jordan)  
se  $m^*(E) = m_*(E)$  in tal caso poniamo

$$|E| = m_*(E) = m^*(E)$$

Sia  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  misurabile

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Dimo che  $f$  è R-integrabile (su  $A$ )

se  $\tilde{f}$  è R-integrabile.

e poniamo

$$\int_A f = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}$$



