

ANALISI MATEMATICA 2

LEZIONE 38 - 5.3.2026

Lemma $E \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato

φ è L -lipschitz

$$\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}^n$$

allora $m^n(\varphi(E)) \leq (\sqrt{n} L)^n m^n(E).$

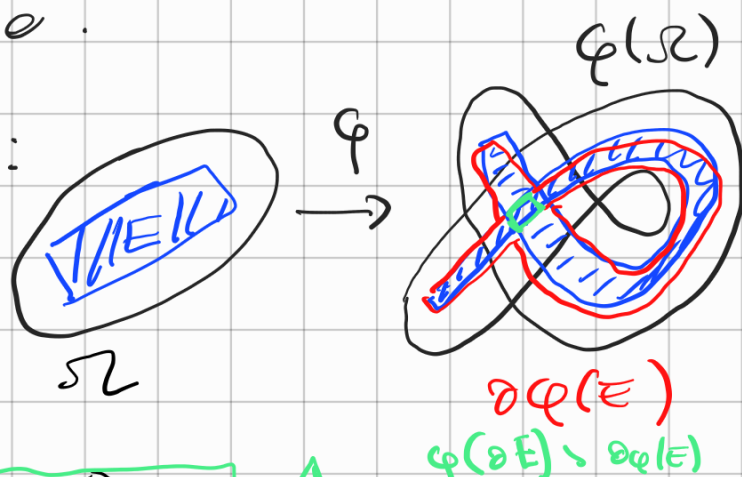
In particolare se $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, det $D\varphi \neq 0$ su Ω

Se $E \subset \Omega$ allora $\varphi(E) \subset \varphi(\Omega)$, $\partial(\varphi(E)) \subset \varphi(\partial E)$

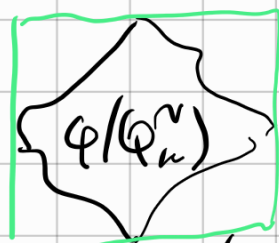
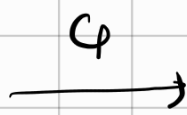
e dunque se E è PJ -misurabile

anche $\varphi(E)$ lo è.

(Caso da teorema presente:



dim

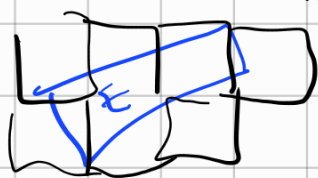


$$\leq \text{diam } \varphi(Q_k^N)$$

φ L -lipschitz

$$\text{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} |x-y|$$

$$\text{diam}(\varphi(Q_k^N)) \leq L \text{diam}(Q_k^N) = L \sqrt{n} 2^{-N}$$



$$|\varphi(Q_k^N)| \leq (L \sqrt{n} 2^{-N})^n$$

$$\varphi(E) \subseteq \bigcup \varphi(Q_k^N)$$

$$m^*(\varphi(E)) \leq \sum_{Q_k^N \cap E \neq \emptyset} |\varphi(Q_k^N)| \leq \sum_{Q_k^N \cap E \neq \emptyset} (L\sqrt{n} 2^{-N})^n$$

$$\leq (L\sqrt{n})^n \sum_{Q_k^N \cap E \neq \emptyset} 2^{-nN} = (L\sqrt{n})^n m^N(E)$$

$\downarrow N \rightarrow \infty$

$$(L\sqrt{n})^n m^*(E)$$

Oss E is PJ-measurable $(\Rightarrow) |\partial E| = 0$

$\varphi(E)$ is PJ-measurable $(\Rightarrow) |\partial \varphi(E)| = 0$

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ m^*(\partial \varphi(E)) = 0 \end{array}$$

se mostrano che

$$\partial(\varphi(E)) \subseteq \varphi(\partial E)$$

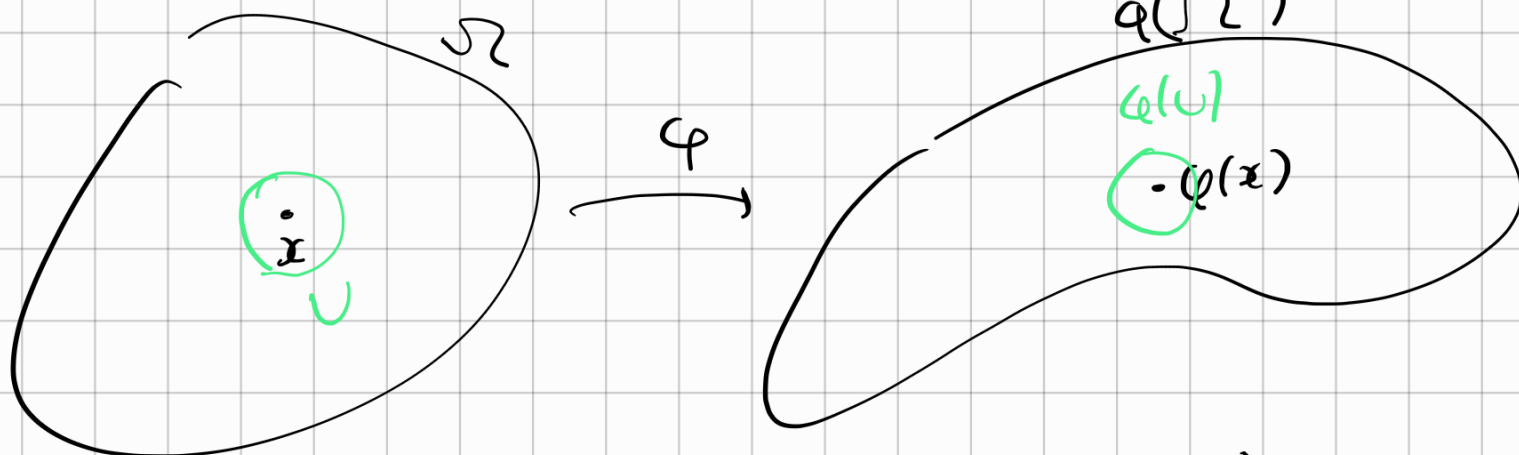
essendo φ L-Lipschitz conclusioni

che

$$m^*(\partial(\varphi(E))) \leq m^*(\varphi(\partial E)) \leq (L\sqrt{n})^n m^*(\partial E) = 0.$$

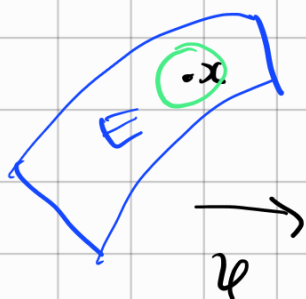
L'ipotesi $\det D\varphi(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Omega$

garantisce che φ è localmente invertibile:

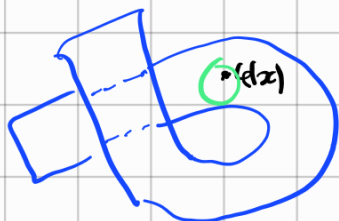


$\Rightarrow \varphi(\Omega)$ è un aperto

$\bar{E} \subset \Omega \Rightarrow \varphi(\bar{E}) \subset \Omega$
 $\uparrow$ compatto $\uparrow$ compatto



Se $x \in \bar{E}$



$\varphi(x)$ è interno
a $\varphi(E)$

$$\partial \varphi(E) \subseteq \overline{\varphi(E)} = \varphi(\bar{E})$$

$$\Rightarrow \partial(\varphi(E)) \subseteq \varphi(\Omega \setminus \overset{\circ}{E}) = \varphi(\bar{E} \setminus \overset{\circ}{E})$$

□



PIANO

$$\begin{cases} y = \varphi(x) \\ dy = |\det D\varphi(x)| dx \end{cases}$$

$$\int_{\varphi(E)} f(y) dy = \int_E f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)| dx$$

③ CAMBIO DI
VARIABILE

$$|\varphi(E)| = \int_E |\det D\varphi(x)| dx$$

② FORMULA
DELL'AREA

$L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineare affine $L(x) = Mx + q$

$$|L(E)| = |\det M| \cdot |E|$$

① SIGNIFICATO GEOMETRICO DEL
DETERMINANTE

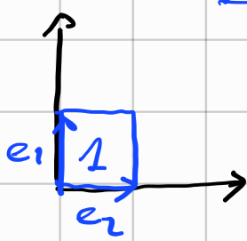
Teorema ① $E \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato PJ-misurabile

$$L(\underline{x}) = M\underline{x} + \underline{q} \quad M \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \underline{q} \in \mathbb{R}^n$$

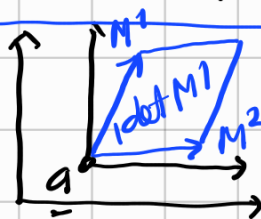
Allora $L(E)$ è PJ-misurabile e

vale

$$|L(E)| = |\det M| \cdot |E|$$



$\xrightarrow{L}$



Ci serve la riduzione a scala di Gauss:

Se M matrice qualunque esistono A, B matrici elementari tali che AMB è diagonale.

$$M = A^{-1} \Delta B^{-1}$$

↑
diagonale.

Quali sono le matrici elementari?

① le matrici di permutazione: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$M(e_j) = e_{\sigma(j)} \quad \sigma \text{ permutazione.}$$

② $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $M(e_j) = e_j + d e_k$

$$M(e_i) = e_i \quad \text{per gli vettori.}$$

le matrici elementari sono composte da matrici ① e ②

Riduzione a scala:

$$AM = \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & 0 & d & ? & 0 & \\ * & 0 & ? & 1 & 0 & \\ * & ? & ? & ? & 0 & \\ 0 & * & * & * & * & \end{array} \right)$$

↑
agisce sulle righe

$$AMB = \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ * & * & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \right) \text{ diagonale.}$$

Oss $M = M_1 \cdot M_2 \quad |M_{1,2}(E)| = |\det M_{1,2}| \cdot E$

$$\begin{aligned} |M(E)| &= |M_1 \cdot M_2(E)| = |\det M_1| \cdot |M_2(E)| \\ &= |\det M_1| \cdot |\det M_2| \cdot |E| \end{aligned}$$

$$= |\det M_1 \cdot M_2| \cdot |E|$$

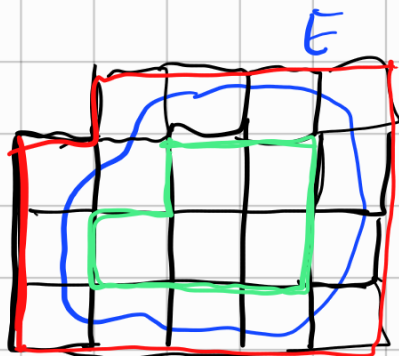
$$= |\det M| \cdot |E|.$$

Oss 1

Basta dimostrare la formula per le matrici elementari!

Oss 2 Basta dimostrare la formula

sui cubi $E = Q_k^N$.



$$E_N \subseteq E \subseteq E^N$$

$L(E)$ è misurabile
perché L è $\|M\|$ -lipschitz

$$\sum_{Q_k^N \subseteq E} |L(Q_k^N)| \leq |L(E)| \leq \sum_{Q_k^N \cap E \neq \emptyset} |L(Q_k^N)| = |\det M| m^N(E)$$

$$\stackrel{||}{|\det M| \cdot m_k(E)} \longrightarrow |\det M| \cdot |E|.$$

se so che $|L(Q_k^N)| = |\det M| \cdot |Q_k^N|$ ok!

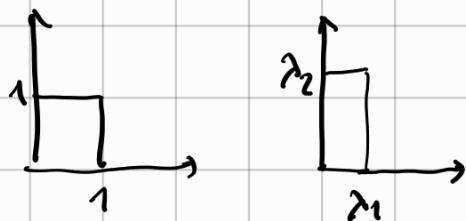
① Se M è una matrice di permutazione

$$M([0,1]^n) = [0,1]^n$$

$$|M(Q_k^N)| = |Q_k^N| \quad \text{ok perché } \det M = \pm 1$$

① Se $M = \Delta$ è diagonale $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$M([0,1]^n) = [0, \lambda_1] \times [0, \lambda_2] \times \dots \times [0, \lambda_n]$$



$$|M([0,1]^n)| = |\lambda_1| \cdot |\lambda_2| \cdot \dots \cdot |\lambda_n| \\ = |\det M|.$$

$$|M(Q_k^N)| = |\det M| \cdot |Q_k^N| \quad \text{ok.}$$

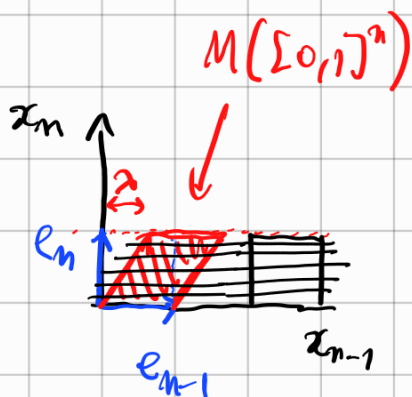
② M mossa elementare. A mezzo di permutazioni

di righe/colonne:

$$\left(\begin{array}{c|c} I_d & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \end{array} \right)$$

$$M(e_{n-1}) = e_{n-1}$$

$$M(e_n) = \lambda e_{n-1} + e_n$$



Principio di Cavalieri:

$$|M([0,1]^n)| = 1, \quad |M(Q_k^N)| = |Q_k^N|$$

ok! perché $\det M = 1 \quad \square$

Corollario Se M è ortogonale (rotazione)

allora $\det M = \pm 1$

$$\Rightarrow |M(E)| = |E|.$$

Se L è una isometria $\Rightarrow M$ è ortogonale $\Uparrow$.

Teorema 2 (Formula dell'area). Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^n$

$\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^1 , $\det D\varphi(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Omega$

φ iniettiva ($\varphi: \Omega \rightarrow \varphi(\Omega)$ è biettiva).

Allora se $E \subset \subset \Omega$ è PS-misurabile anche $\varphi(E) \subset \subset \varphi(\Omega)$ è PS-misurabile (lemma già visto)

$$e \quad |\varphi(E)| = \int_E |\det D\varphi(x)| dx.$$

dim Passo 1. (lemma del cubo interno/esterno)

supponiamo che $E = [0,1]^n \subset \subset \Omega$ e tale che
 $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$

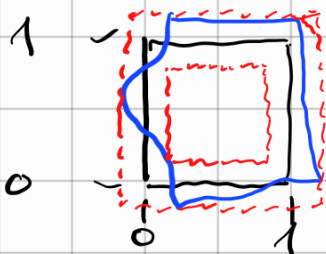
$$|\varphi(x) - x| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [0,1]^n$$

Allora

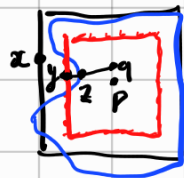
✓ cubo esterno
ovvio!

$$[\varepsilon, 1-\varepsilon]^n \subseteq \varphi([0,1]^n) \subseteq [-\varepsilon, 1+\varepsilon]^n$$

↑
Non ovvio!



Per assurdo



$$\exists y \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]^n \setminus \varphi([0,1]^n)$$

$$p = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) \text{ centro di } [0,1]^n$$

$$q = \varphi(p) \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]^n$$

$$[q, y] \subseteq [\varepsilon, 1-\varepsilon]^n$$

$$q \in \varphi([0,1]^n)$$

$$y \notin \varphi([0,1]^n)$$

$$\exists z \in [q, y] \cap \partial \varphi([0,1]^n) \subseteq [\varepsilon, 1-\varepsilon]^n$$

per ipotesi

$$\text{ma } \partial \varphi([0,1]^n) \subseteq \varphi(\partial [0,1]^n)$$

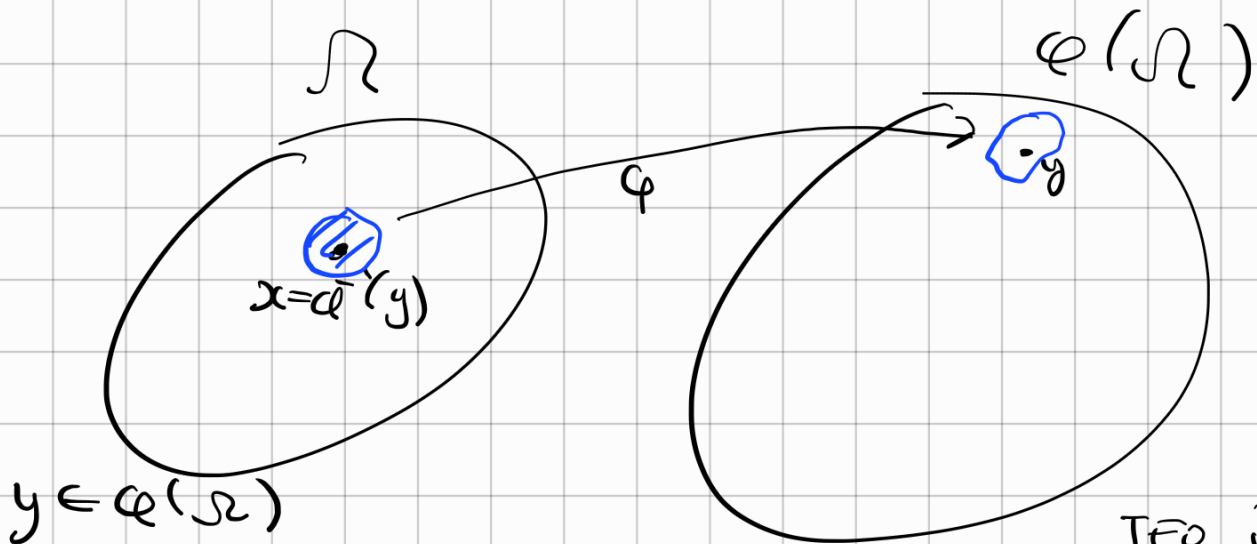
$$\Rightarrow z = \varphi(x) \text{ con } x \in \partial [0,1]^n,$$

$$|z-x| = |\varphi(x)-x| \leq \varepsilon$$

$$\text{Assunto } |x-z| > \varepsilon$$

□

$$d(\partial[0,1]^n, [\varepsilon, 1-\varepsilon]^n) = \varepsilon.$$



$\exists U$ intorno di $x = \varphi^{-1}(y)$
 tale che $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$
 $\varphi(U)$ è un intorno di y

TEO invertibilità
 locale.

$\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ è invertibile
 con $\varphi^{-1} \in C^1$.

$$D\varphi^{-1}(y) = (D\varphi(\varphi^{-1}(y)))^{-1}$$