

ANALISI MATEMATICA 2

LEZIONE 40 - 11.3.2026

• $|L(E)| = |\det L| \cdot |E|$ L lineare

Teorema (formula dell'area) Ω aperto di $\mathbb{R}^n$

$$\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \varphi \in C^1, \text{ iniettiva, } \det D\varphi \neq 0$$

$$\varphi: \Omega \rightarrow \varphi(\Omega) \text{ è invertibile } \varphi^{-1} \in C^1$$

$$E \subset \Omega \text{ misurabile} \Rightarrow \varphi(E) \subset \varphi(\Omega) \text{ è misurabile}$$

$$|\varphi(E)| = \int_E |\det D\varphi|$$

dim (CONTINUA DALLA LEZIONE SCORSA)

Lemma (cubo esterno/interno) $\varphi: [0,1]^n \subset \Omega$

$$|\varphi(x) - x| < \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$$

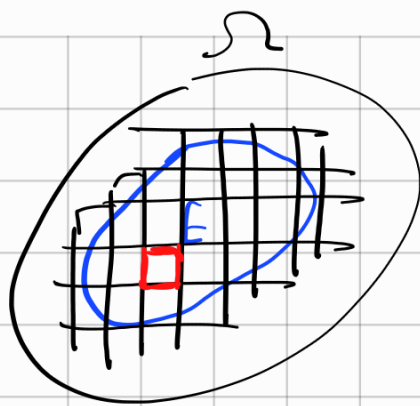
allora $[\varepsilon, 1-\varepsilon]^n \subseteq \varphi([0,1]^n) \subseteq [-\varepsilon, 1+\varepsilon]^n$

• quindi $(1-2\varepsilon)^n \leq |\varphi([0,1]^n)| \leq (1+2\varepsilon)^n$

dim (lemma)
grazie vista.

conclusione dim. teorema:

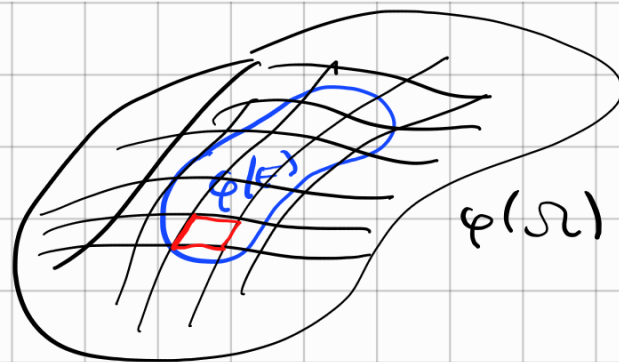
}



Q_k^N

Fissione Q_k^N

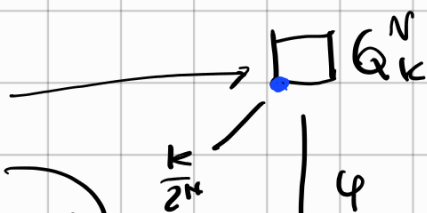
φ



$\varphi(Q_k^N)$

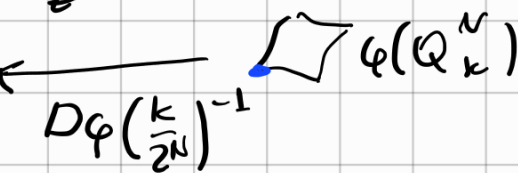
$$Q_k^N = \frac{[0,1]^n + k}{2^N}$$

$$k \in \mathbb{Z}^n$$



$\frac{k}{2^N}$

φ



ψ

$D\varphi\left(\frac{k}{2^N}\right)^{-1}$

$$\psi: [0,1]^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \psi(x) = 2^N \left(D\varphi\left(\frac{k}{2^N}\right) \right)^{-1} \left[\varphi\left(\frac{x+k}{2^N}\right) - \varphi\left(\frac{k}{2^N}\right) \right]$$

$$\psi(0) = 0$$

$$D\psi(x) = \cancel{2^N} \left(D\varphi\left(\frac{k}{2^N}\right) \right)^{-1} \cdot D\varphi\left(\frac{x+k}{2^N}\right) \cdot \cancel{\frac{1}{2^N}}$$

$$\|D\psi(x) - Id\| = \left\| \left(D\varphi\left(\frac{k}{2^N}\right) \right)^{-1} \cdot \left(D\varphi\left(\frac{x+k}{2^N}\right) - D\varphi\left(\frac{k}{2^N}\right) \right) \right\|$$

$$\leq \left\| \left(D\varphi\left(\frac{k}{2^N}\right) \right)^{-1} \right\| \cdot \left\| D\varphi\left(\frac{k}{2^N} + \frac{x}{2^N}\right) - D\varphi\left(\frac{k}{2^N}\right) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N$ abbastanza grande per cui

se $Q_k^N \subset K$ con $\bar{E} \subset K \subset \Omega$

$\varphi(E) \subset K' \subset \varphi(\Omega)$

$$\|D\varphi(x)^{-1}\| = \|D\varphi^{-1}(\varphi(x))\|$$

$\|D\varphi^{-1}\|$ è continua in K' ha massimo

• $\varphi \in C^1 \Rightarrow D\varphi \in C^0 \Rightarrow$ uniformemente continua su K

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: x, x' \in Q_k^N \Rightarrow \|D\varphi(x) - D\varphi(x')\| \leq \varepsilon$$

$$\|D(\varphi(x) - x)\| = \|D\varphi(x) - Id\| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow |\varphi(x) - x| = |(\varphi(x) - x) - (\varphi(0) - 0)| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} |x - 0| \quad \leftarrow \text{disuguaglianza di Lagrange}$$

$$\leq \varepsilon \quad x \in [0, 1]^n$$

Applico il lemma!

$$(1 - 2\varepsilon)^n \leq |\varphi([0, 1]^n)| \leq (1 + 2\varepsilon)^n$$

$$\varphi([0, 1]^n) = 2^N \left(D\varphi\left(\frac{k}{2^N}\right) \right)' \left(\varphi(Q_k^N) \right)$$

$$|\varphi([0, 1]^n)| = 2^{nN} \left| \det \left(D\varphi\left(\frac{k}{2^N}\right) \right)^{-1} \right| \cdot |\varphi(Q_k^N)|$$

$$\rightarrow (1 - 2\varepsilon)^n \stackrel{\textcircled{1}}{\leq} \frac{|\varphi(Q_k^N)|}{|Q_k^N| \cdot |\det D\varphi(\frac{k}{2^N})|} \leq (1 + 2\varepsilon)^n$$

$$\inf_{Q_k^N} |\det D\varphi| \leq |\det D\varphi(\frac{k}{2^N})| \leq \sup_{Q_k^N} |\det D\varphi|$$

$$(1-2\varepsilon)^n S_N(|\det D\varphi|) = (1-2\varepsilon)^n \sum_{Q_k^N \cap E \neq \emptyset} |Q_k^N| \cdot \inf_{Q_k^N} |\det D\varphi|$$

$$\stackrel{(1)}{\leq} \sum_{Q_k^N \cap E \neq \emptyset} |\varphi(Q_k^N)| \stackrel{(2)}{\leq} (1+2\varepsilon)^n S^N(|\det D\varphi|)$$

ma $|\det D\varphi|$ è continua $\Rightarrow$ integrabile

per $N \rightarrow \infty$

$$(1-2\varepsilon)^n \int |\det D\varphi| \leq |\varphi(E)| \leq (1+2\varepsilon)^n \int |\det D\varphi|$$

per $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int |\det D\varphi| = |\varphi(E)| \quad \square$$

Teorema (cambio di variabile) Ω aperto di $\mathbb{R}^n$

$\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathcal{C}^1$, iniettiva, $\det D\varphi \neq 0$,

($\varphi(\Omega)$ è aperto, $\varphi^{-1}: \varphi(\Omega) \rightarrow \Omega$ è $\mathcal{C}^1$) .

Sia $E \subset \Omega$ misurabile (allora $\varphi(E)$ è misurabile)

Sia $f: \varphi(E) \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e integrabile.

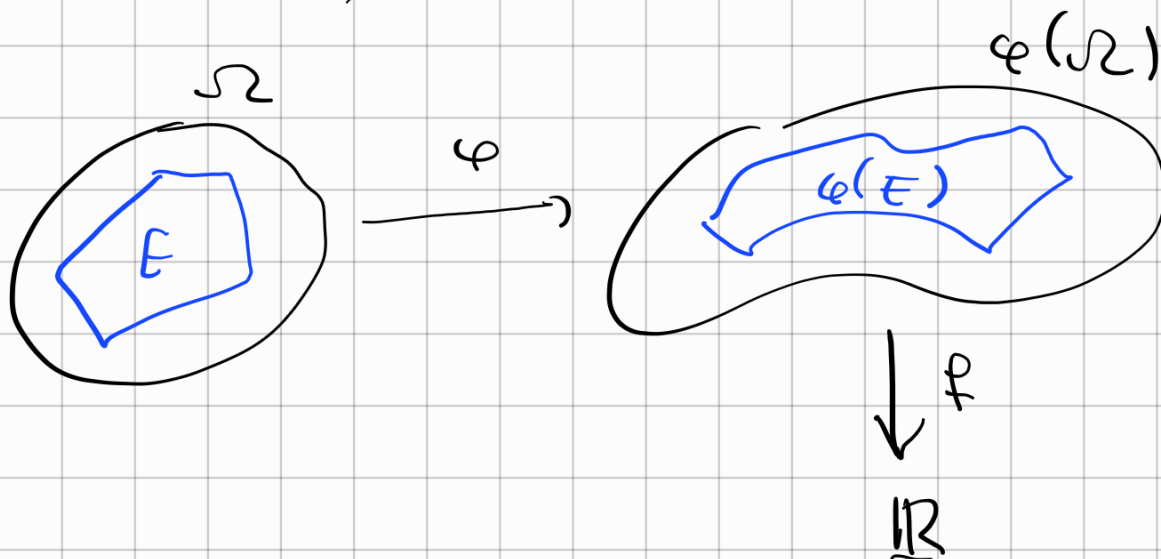
Allora:

$$\int_{\varphi(E)} f(\underline{y}) d\underline{y} \stackrel{(4)}{=} \int_E f(\varphi(\underline{x})) \cdot |\det D\varphi(\underline{x})| d\underline{x}$$

ovvero

$$\begin{cases} \underline{y} = \varphi(\underline{x}) \\ d\underline{y} = |\det D\varphi(\underline{x})| \cdot d\underline{x} \end{cases}$$

dilu



Pero 1. se $f = 1_F$ la tesi è garantita dal
teorema precedente $\int f = |F| = |\varphi(\varphi^{-1}(F))|$

$$\hookrightarrow = \int_{\varphi^{-1}(F)} |\det D\varphi(\underline{x})| d\underline{x}$$

$$= \int f(\varphi(\underline{x})) \cdot |\det D\varphi(\underline{x})| d\underline{x}$$

$$f(\varphi(\underline{x})) = \begin{cases} 1 & \text{se } \varphi(\underline{x}) \in F \\ 0 & \text{se } \varphi(\underline{x}) \notin F \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } \underline{x} \in \varphi^{-1}(F) \\ 0 & \text{se } \underline{x} \notin \varphi^{-1}(F) \end{cases}$$

Pero 2 la formula (*) è lineare in f

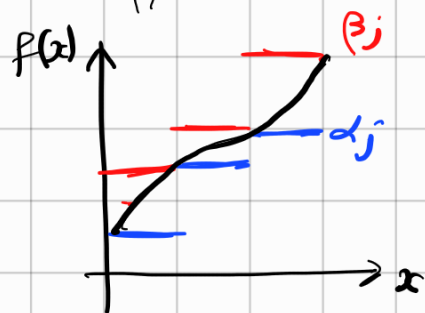
dunque (*) vale se $f = \sum_{j=1}^N d_j 1_{F_j}$ ← funzioni "semplici"

con $F_j \subset \varphi(\Omega)$ misurabili, $d_j \in \mathbb{R}$

Pono 3 Se f è integrabile, limitata, e supportato compatto in $\varphi(\Omega)$

$$\alpha_j = \inf_{Q_j^N} f$$

$$\beta_j = \sup_{Q_j^N} f$$



$$f^N = \sum_{Q_j^N \cap \text{spt } f \neq \emptyset} \beta_j \cdot 1_{Q_j^N}$$

$$f_N = \sum \alpha_j \cdot 1_{Q_j^N}$$

$$f_N(y) \leq f(y) \leq f^N(y)$$

$\Downarrow$

$\forall y \in \bigcup Q_j^N$
 $\nearrow$
 "quasi giù y"

$$f_N(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)| \leq f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)| \leq f^N(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)|$$

$$S^M((f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi|) \leq S^M(f^N \circ \varphi \cdot |\det D\varphi|) \rightarrow \int f \circ \varphi \cdot |\det D\varphi|$$

$\parallel \leftarrow \text{Risso}$

$$\int f \leftarrow \int f^N$$

$$\int f \leftarrow \int f_N$$

$\parallel \leftarrow$

$$S_M((f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi|) \geq S_M(f_N \circ \varphi \cdot |\det D\varphi|) \rightarrow \int f_N \circ \varphi \cdot |\det D\varphi|$$

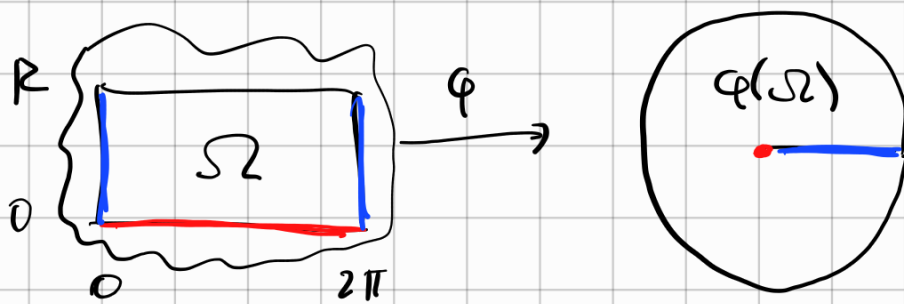
dunque $(f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi|$ è integrabile e

$$\int (f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi| = \int f$$

□

Oss la richiesta di avere supporto compatto è un po' stringente.

ES



$$\varphi(\theta, \rho) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

Problemi:

1. $E = \Omega$ non è a supporto compatto
2. su $\bar{\Omega}$ φ non è invertibile
3. $\det D\varphi = |\rho|$ si annulla su $\rho = 0$.

Teorema (generalizzato) se E, F aperti ^{limitati} misurabili di $\mathbb{R}^n$, $\varphi: E \rightarrow F$ invertibile, C^1 , $\det D\varphi \neq 0$

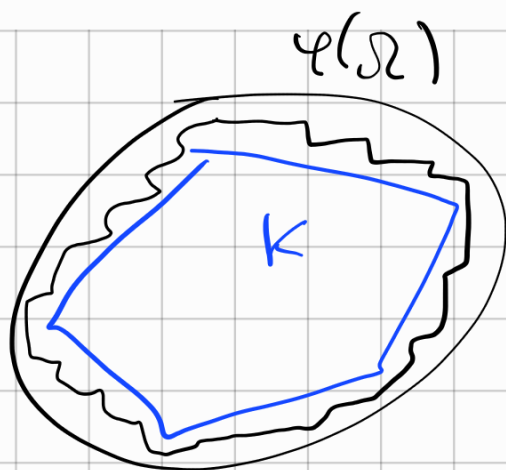
f integrabile su F e $f \circ \varphi \cdot |\det D\varphi|$ integrabile su E (ad esempio f continua) allora

$\int f = \int f \circ \varphi \cdot |\det D\varphi|$

$$\int f = \int f \circ \varphi \cdot |\det D\varphi|$$

dim $\Rightarrow$ approssimo gli integrali dell'interno

$$f_k = f \cdot 1_k \quad \text{con } k \text{ che invade } \varphi(\Omega)$$

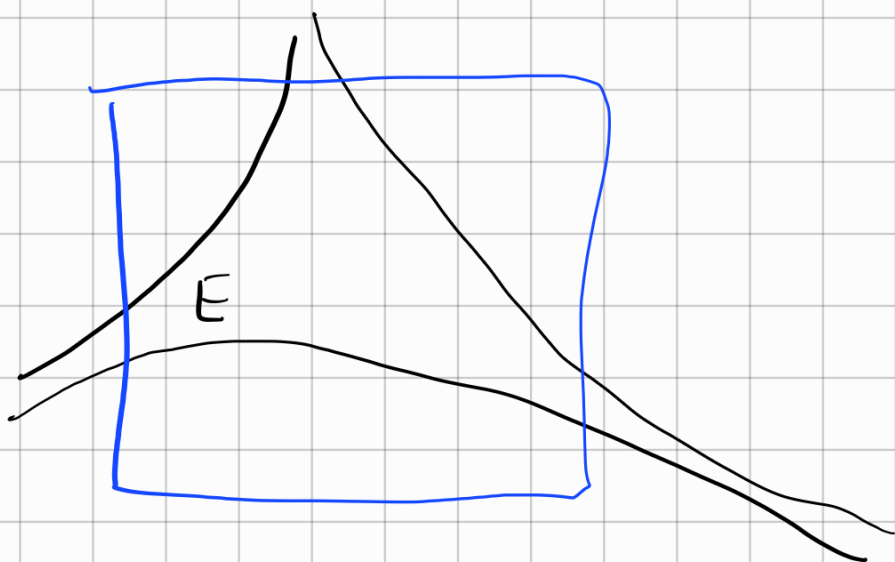


passo al limite per

$$K \nearrow \phi(\Omega) \quad \square$$

INTEGRALI GENERALIZZATI

- Come integro su insiemini illimitati?
- Come integro funzioni non limitate?



1. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ (eventualmente non limitato)

Se $\forall R$ l'insieme $E \cap [-R, R]^n$

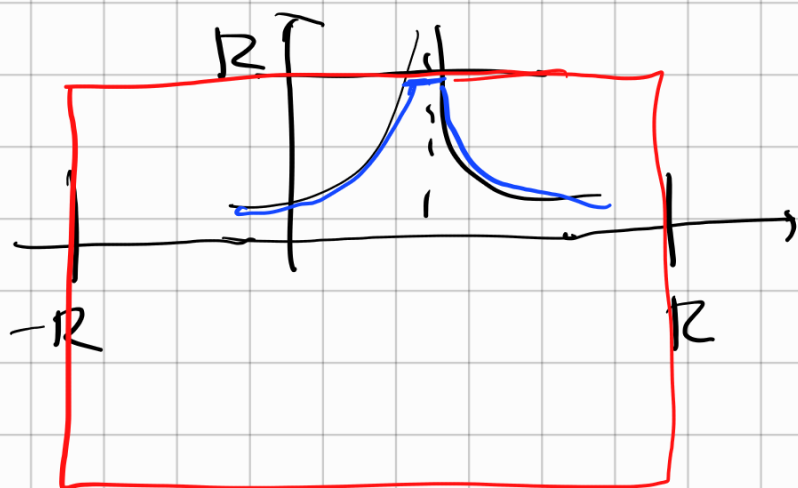
è misurabile diciamo che E è misurabile

e definiamo $|E| = \lim_{R \rightarrow \infty} |E \cap [-R, R]^n| \in [0, +\infty]$

$\uparrow$ crescente in R

2. Se $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, E misurabile, $f \geq 0$
(non necessariamente limitata)

poniamo $f_R = f \cdot 1_{[-R, R]^n} \vee \mathbb{R}$



Se f_R è integrabile

diremo che f

è "localmente integrabile"

Definiamo:

← crescente in R !

$$\int f = \lim_{R \rightarrow \infty} \int f_R$$

(2) Se f ha segno qualunque

$$f^+, f^-$$

$$f^+ = f \vee 0, f^- = (-f)^+$$

Se f^+ e f^- sono localmente integrabili diremo che f è localmente integrabile.

Se $\int f^+$ e $\int f^-$ non sono entrambi infiniti poniamo:

$$\int f = \int f^+ - \int f^- \in [-\infty, +\infty]$$

Se $\int f \in \mathbb{R}$ diremo che f è integrabile.