

Prova scritta parziale n. 2

Analisi Matematica 2

Corso di Studi in Matematica

19 marzo 2026

1. Consideriamo per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{1 + n^3x^4}.$$

- (a) Determinare il limite puntuale di f_n .
- (b) Dire se f_n converge uniformemente (su tutto $\mathbb{R}$).
- (c) Discutere la convergenza puntuale e totale della serie

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

(In quali punti c'è convergenza puntuale? In quali intervalli c'è convergenza totale?)

- (d) Dire se la serie di funzioni converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$.

Soluzione. (a) La successione f_n converge puntualmente alla funzione nulla, perché per $x = 0$ si ha $f_n(0) = 0$ per ogni n e per $x \neq 0$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 x^2} = 0.$$

- (b) La successione f_n converge uniformemente alla funzione nulla, infatti

$$\|f_n\|_{\infty} = \max_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n(n^{-3/4}) = \frac{1}{2\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

Per il calcolo del massimo, abbiamo usato il fatto che f_n è continua e derivabile, non negativa, e $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_n(x) = 0$. La derivata

$$f'_n(x) = \frac{2nx(1 - n^3x^4)}{(1 + n^3x^4)^2}$$

si annulla in $x = 0$ (punto di minimo assoluto) e in $x = \pm n^{-3/4}$ (punti di massimo assoluto).

- (c) La serie $S(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x)$, con $S_N(x) = \sum_{n=0}^N f_n(x)$, converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$, infatti per $x = 0$ vale $S_N(0) = 0$ quindi $S(0) = 0$, per $x \neq 0$ vale $f_n(x) \sim 1/(n^2 x^2)$ per $n \rightarrow \infty$, quindi la serie $S(x)$ associata converge per confronto asintotico con $\sum_{n \geq 1} 1/n^2$.

La serie non converge totalmente in $\mathbb{R}$ perché

$$\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_{\infty} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2\sqrt{n}} = +\infty.$$

La serie non converge totalmente sugli intervalli la cui chiusura contiene 0, cioè della forma $(-a, 0)$, $(0, a)$, $(-a, b)$ con $a, b > 0$, e le loro chiusure. Sia I un tale intervallo: definitivamente, diciamo per $n \geq \bar{n}$, almeno uno dei due punti di massimo $\pm n^{-3/4}$, appartiene ad I , quindi

$$\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_{\infty} \sim \sum_{n \geq \bar{n}} \frac{1}{2\sqrt{n}} = +\infty.$$

La serie converge totalmente su tutti gli altri intervalli, cioè della forma $(a, +\infty)$, $(-\infty, -a)$, con $a > 0$, le loro chiusure e i sottointervalli. Sia J un tale intervallo: definitivamente, diciamo per $n \geq \bar{m}$, entrambi i punti $\pm n^{-3/4}$ non appartengono a J e, per monotonia di f_n in J , si ha

$$\max_{x \in J} |f_n(x)| = \frac{na^2}{1 + n^3 a^4},$$

quindi

$$\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty \sim \sum_{n \geq \bar{m}} \frac{na^2}{1 + n^3 a^4} \sim \frac{1}{a^2} \sum_{n \geq \bar{m}} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

(d) Dal punto (c) deduciamo che la serie converge uniformemente in tutti i sottointervalli di $(a, +\infty)$ e $(-\infty, -a)$ con $a > 0$. Mostriamo che non si ha convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}$, o più in generale sugli intervalli J come sopra, la cui chiusura contiene 0: per $N \in \mathbb{N}$, $N \gg 1$, consideriamo

$$\begin{aligned} \|S_N - S\|_\infty &= \sup_{x \in J} |S_N(x) - S(x)| = \sup_{x \in J} \sum_{k > N} \frac{kx^2}{1 + k^3 x^4} \geq \sum_{k > N} \frac{k(N^{-3/4})^2}{1 + k^3 (N^{-3/4})^4} \\ &\geq \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{k(N^{-3/4})^2}{1 + k^3 (N^{-3/4})^4} = \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{kN^{3/2}}{N^3 + k^3} \geq \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{kN^{3/2}}{N^3 + (2N)^3} \\ &= \frac{1}{9N^{3/2}} \sum_{k=N+1}^{2N} k = \frac{\sqrt{N}}{6} - \frac{1}{18\sqrt{N}}. \end{aligned}$$

Qui abbiamo usato che per N grande il punto $x = N^{-3/4}$ appartiene a J . Concludiamo quindi che

$$\|S_N - S\|_\infty \longrightarrow +\infty$$

quando $N \rightarrow \infty$. □

2. Si consideri la funzione

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{xt} - 1}{t \cdot e^{xt+t}} dt.$$

- (a) Verificare che $F: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è ben definita.
- (b) Dimostrare che F è derivabile;
- (c) Calcolare $F(1)$.

Soluzione. (a) Osserviamo che la funzione integranda

$$f(x, t) = \frac{e^{xt} - 1}{t \cdot e^{xt+t}}$$

è definita e positiva sull'intervallo aperto di integrazione $(0, +\infty)$ per ogni $x > -1$. Per $t \rightarrow 0$ osserviamo che $f(x, t) \sim x$ quindi è integrabile in un intorno destro di 0. Per $t \rightarrow +\infty$ osserviamo che $f(x, t) \ll e^{-(x+1)t}$ quindi è integrabile in un intorno di $+\infty$. Dunque l'integrale converge e $F(x)$ è ben definita per ogni $x > -1$.

(b) Vogliamo verificare che si applica il teorema di scambio dell'integrale con la derivata. Innanzitutto osserviamo che la funzione f è derivabile rispetto ad x e si ha

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = \dots = e^{-(x+1)t}.$$

Fissato $x_0 > -1$ osserviamo che si ha

$$\left| \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right| \leq e^{-(x_0+1)t}, \quad \forall x \geq x_0.$$

Dunque per $x \in (x_0, +\infty)$ si trova che F è derivabile in x e vale:

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(x+1)t} dt = \dots = \frac{1}{x+1}.$$

Questo è vero per ogni $x_0 > -1$ quindi F è derivabile su tutto $(-1, +\infty)$.

(c) Osserviamo che si ha $F(0) = \int_0^{+\infty} 0 = 0$. Sfruttiamo il punto precedente per scrivere, grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$F(1) = F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \log 2.$$

□