

ANALISI MATEMATICA 2

LEZIONE 46 - 26.3.2026

FORME DIFFERENZIALI

$$f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

A aperto $f \in C^1$

$$df: A \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*$$
$$x \mapsto \lambda$$

Dato $x \in A, v \in \mathbb{R}^n$

$$\lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$
$$v \mapsto \lambda[v]$$

$$df_x[v] \in \mathbb{R}$$

$$df_x[v] = \nabla f(x) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(x)$$

$$(\mathbb{R}^n)^* \approx \mathbb{R}^n$$
$$\lambda \quad \quad \quad \xi$$

prodotto scalare

$$\lambda[v] = \xi \cdot v$$

$$\text{Es } df \approx \nabla f$$

Una base di $(\mathbb{R}^n)^*$ è data:

$$\lambda_k[e_j] = \delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{se } k=j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

delta di Kronecker

Osservazione

$$x_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_k$$

$$dx_k = \lambda_k$$

↑
costante

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_j} = \begin{cases} 1 & k=j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$dx_1, \dots, dx_n$ calcolate in qualunque punto
 $x \in \mathbb{R}^n$ formano una
 base di $(\mathbb{R}^n)^*$

Def [forme differenziali lineari]
 (o 1-forme)

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

$$\Omega^1(A) = \{ \omega : A \rightarrow (\mathbb{R}^n)^* \}$$

Esempi $df, dx_1, \dots, dx_n$

Abbiamo capito che ogni $\omega \in \Omega^1(A)$
 si può scrivere così:

$$\omega_x = \xi_1(x) dx_1 + \dots + \xi_n(x) dx_n$$

in effetti: $\omega_x[v] = \underline{\xi}(x) \cdot v$

basta
verificare su una base $\rightarrow$ dove $\underline{\xi}(x) = (\xi_1(x), \dots, \xi_n(x))$

In particolare

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Se $\varphi: [a, b] \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega^1(A)$
 ω di classe C^1

definisco

$$\int_{\varphi} \omega = \int_a^b \omega_{\varphi(t)}[\varphi'(t)] dt = \int_a^b \xi(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

quando $\omega_x[v] = \xi(x) \cdot v$

[le 1-forme si integrano su oggetti 1-dimensionali]

FORME DIFFERENZIALI MULTI-LINEARI (k-forme) $0 \leq k \leq n$

$$\lambda: \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ volte}} \rightarrow \mathbb{R}$$

k ingressi

$$(v_1, \dots, v_k) \mapsto \lambda[v_1, \dots, v_k]$$

si dice essere **multilineare** se λ è lineare separatamente in ogni "ingresso":

Es: $\lambda[v_1, v+w, v_3] = \lambda[v_1, v, v_3] + \lambda[v_1, w, v_3]$

$$\lambda[v_1, v_2, c v_3] = c \lambda[v_1, v_2, v_3]$$

λ si dice essere **alternante** se scambiando due ingressi il risultato cambia segno:

$$\lambda[v_1, v_3, v_2] = -\lambda[v_1, v_2, v_3]$$

ovvero $\sigma \in S_k$ (permutazione di $\{1, \dots, k\}$)

$$\lambda[v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k)}] = (-1)^\sigma \lambda[v_1, \dots, v_k]$$

$\uparrow$
sgn σ = segno della permutazione.

V sp. vettoriale di dim $V = n$

Def $\Lambda^k(V) = \{ \text{applicazioni } k\text{-multilineari} \\ \text{alternanti su } V \}$

ES $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$

(definizione assiomatica del determinante)

GEOMETRIA 1

$$\lambda \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$$

$$\lambda[v_1, \dots, v_n] = c \det(v_1, \dots, v_n)$$

per quel che $c \in \mathbb{R}$

$$\dim(\Lambda^n(\mathbb{R}^n)) = 1$$

ES $k=1$ $\Lambda^1(\mathbb{R}^n) = (\mathbb{R}^n)^*$

ES $k=0$ $\Lambda^0(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}$

Considero di capire cos'è $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$
con $1 \leq k \leq n$

$$\lambda \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \quad v_1, \dots, v_n \text{ base di } \mathbb{R}^n$$

$$\lambda[v_{j_1}, \dots, v_{j_k}] = ?$$

oss 1: se due ingressi sono ripetuti ottengo 0

$$\begin{aligned} \text{es: } \lambda[v_1, v_2, v_3, v_2] &= \\ &= -\lambda[v_1, \cancel{v_2}, v_3, v_2] = 0. \end{aligned}$$

oss 2: se permuto gli ingressi il risultato
è definito dal segno della permutazione

conclusione: λ è determinato dai valori su:

$$\lambda[v_{j_1}, \dots, v_{j_k}]$$

$$\text{con } 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n.$$

Abbiamo dimostrato che $\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n) = \binom{n}{k}$

Def (k -forme differenziali)

$$\omega \in \Omega^k(A) \quad A \text{ aperto di } \mathbb{R}^n$$

$$\omega: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$$

$$\omega(x) = \sum_{0 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \xi_{j_1 \dots j_k}(x) dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$$

dove $dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$ è quella appartenente in $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$

tale che $(dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k})(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) = 1$
 $= 0$ sulle altre.

ES $n=3, k=2, x_1, x_2, x_3 \rightsquigarrow x, y, z$

$$(dx \wedge dz)[e_1, e_3] = 1 \Rightarrow (dx \wedge dz)[e_3, e_1] = -1$$

$$(dx \wedge dz)[v, e_3] = ?$$

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$$

$$(dx \wedge dz)[v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3, e_3] =$$

$$= v_1 dx \wedge dz[e_1, e_3] + v_2 dx \wedge dz[e_2, e_3]$$

$$+ v_3 dx \wedge dz[e_3, e_3]$$

$$= v_1$$

$$v = (v_1, v_2, v_3) \quad w = (w_1, w_2, w_3)$$

$$(dx \wedge dz)[v, w] = dx \wedge dz[v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3, w_1 e_1 + w_2 e_2 + w_3 e_3]$$

$$= v_1 w_3 - v_3 w_1$$

↑ definizione
alternativa.

$$\left[\begin{array}{l} \textcircled{P} \\ dx \wedge dz = dx \otimes dz - dz \otimes dx \end{array} \right]$$

Ripetendo:

$$dx \wedge dz$$

$$x \rightsquigarrow e_1$$

$$z \rightsquigarrow e_3$$

$$\mu [e_1, e_3] \text{ fa } 1 \Rightarrow \mu [e_3, e_1] = -1$$

$$\mu [c_1 e_1, c_3 e_3] = c_1 c_3$$

in tutti gli altri fa 0.

Es 2-forme in $\mathbb{R}^3$ $k=2$ $n=3$

$$\dim \Lambda^2(\mathbb{R}^3) = \binom{3}{2} = 3$$

Baso di $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$: $dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy$

$$\omega \in \Omega^2(A) \quad A \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\omega_{x,y,z} = \xi_1(x,y,z) dy \wedge dz + \xi_2(x,y,z) dz \wedge dx + \xi_3(x,y,z) dx \wedge dy$$

$$\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$$

campi vettoriali



$$\Omega^2(A) \underset{A \subseteq \mathbb{R}^3}{\approx} \mathcal{X}(A) \doteq \{ \underline{\xi} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \}$$

DIFFERENZIALE

Gia visto $k=0$

$$\boxed{\Omega^k(A) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(A)}$$

$$\Omega^0(A) = \{ f : A \rightarrow \mathbb{R} \} \underset{\Lambda^0(\mathbb{R}^n)}{=}$$

$f \in \Omega^0(A)$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1

$df \in \Omega^1(A)$ (di classe C^0)

per definire d , lineare, basta dire quanto fa

$$\begin{aligned} d \left(\overbrace{f(x) \cdot dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}}^{\text{costante}} \right) \\ = df \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} + 0 \\ = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \end{aligned}$$

Esempio $\omega = f dx \wedge dy - g dy \wedge dz$ $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$

$f, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (funzioni)

$$\begin{aligned} d\omega &= df \wedge dx \wedge dy - dg \wedge dy \wedge dz \\ &= (f_x dx + f_y dy + f_z dz) \wedge dx \wedge dy \\ &\quad - (g_x dx + g_y dy + g_z dz) \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

NOTAZIONE

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$= f_x \cancel{dz \wedge dx \wedge dy} + f_y \cancel{dy \wedge dx \wedge dy} \dots$$

$$= f_z dz \wedge dx \wedge dy - g_x dx \wedge dy \wedge dz$$

$$= (f_z - g_x) dx \wedge dy \wedge dz$$

$$dx \wedge dy \wedge dz [v_1, v_2, v_3] = \det(v_1, v_2, v_3)$$

$$dz \wedge dx \wedge dy = dx \wedge dy \wedge dz \quad (\text{permut. par})$$

Es $dx \wedge dz \wedge dy = - dx \wedge dy \wedge dz$
 $\quad \quad \quad \nwarrow$
 $\quad \quad \quad \text{dispari}$