

ANALISI MATEMATICA 2

LEZIONE 49 - 2.4.2026

Teorema [l'integrale di superficie non dipende
dalla parametrizzazione]

$$y \in \overline{B} \subseteq \mathbb{R}^k \xrightarrow{\varphi} A \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\uparrow u$$

$$x \in \overline{C} \subseteq \mathbb{R}^k$$

$$y = u(x)$$

$$\int_{\varphi \circ u} f \, d\sigma = \int_{\varphi} f \, d\sigma$$

B, C aperti e limitati
 $\varphi \in C^1$
 $u \in C^1$
 a lipschitz da $C \rightarrow B$
 $\det Du \neq 0$ su C

dim

$$\int_{\varphi \circ u} f \, d\sigma := \int_C f(\varphi(u(x))) \sqrt{\det (D\varphi(u))^t (D\varphi(u))} \, dx$$

$$= \int_C f(\varphi(u(x))) \sqrt{\det (D\varphi(u(x)) \cdot Du(x))^t (D\varphi(u(x)) \cdot Du(x))} \, dx$$

$$= \int_C f(\varphi(u(x))) \sqrt{\det \left(\underbrace{Du(x)^t}_{k \times k} \cdot \underbrace{D\varphi(u(x))}_{k \times n} \right)^t \underbrace{D\varphi(u(x))}_{n \times k} \cdot \underbrace{Du(x)}_{k \times k}} \, dx$$

$$= \int_C f(\varphi(u(x))) \sqrt{\det D\varphi(u(x))^t D\varphi(u(x)) \cdot \underbrace{|\det Du(x)|}_{dy}} \, dx$$

$$\begin{cases} y = u(x) \\ dy = |\det Du(x)| \, dx \end{cases}$$

↖ cambio coordinate

$$= \int_B f(\varphi(y)) \sqrt{\det D\varphi(y)^t D\varphi(y)} dy =: \int_{\varphi} f d\sigma$$

Obiettivo: STOKES.

$$\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega$$

□
ω k-1-forma
S k-superficie

Oss

$$\int_{\varphi} \omega = \int_B \varphi^* \omega$$

↑
k-forma
in $\mathbb{R}^k$.

ω k-forma
 $\varphi: B \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$

Oss Abbiamo già visto come interpretare forme e differenziali in $\mathbb{R}^3$:

Stokes
in $\mathbb{R}^3$

$$\int_S (\text{rot } \xi) \cdot \nu_S d\sigma = \int_{\partial S} \xi \cdot \tau_{\partial S} ds$$

↖ 2-forma ↖ 1-forma

↑ ↑
flusso di rot ξ circolazione
attraverso S di ξ

divergenza
in $\mathbb{R}^n$

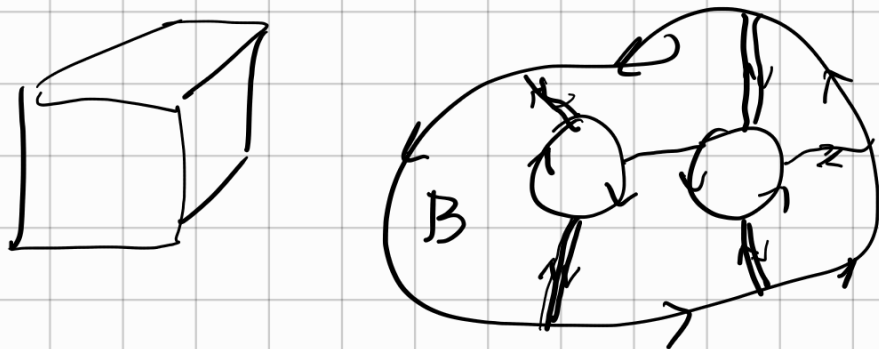
$$\int_{\Omega} \text{div } \xi = \int_{\partial \Omega} \xi \cdot \nu_{\Omega} d\sigma$$

↑ ↑
integrale
"pieno" flusso di ξ
attraverso l'ipersuperficie $\partial \Omega$

Oss1: usando il pull-back sare-
sufficiente dimostrare Stokes nello

spazio dei parametri. Quindi nel
caso di ω $(k-1)$ -forma in $\mathbb{R}^k$.

Oss 2: lo facciamo solo per un cubo:



Oss 3. Il teorema di Stokes sul cubo
è equivalente al teorema della
divergenza.

Integrale di una $(n-1)$ -forma su una $(n-1)$ -superficie

$\omega \in \Omega^{n-1}(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

$$\S \quad \omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \xi_i dx_1 \wedge \dots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$$

manca dx_i

con $\underline{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ $\xi: A \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \int dw &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n \\ &\quad \searrow j=i \text{ altrimenti si cancella} \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \end{aligned}$$

$$= \text{div} \left\{ dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \right\}$$

$$\omega_S(E) \int_{\varphi} \omega ?$$

$$B \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \xrightarrow{\varphi} A \subseteq \mathbb{R}^n \ni y \quad y = \varphi(x)$$

$$\downarrow \omega$$

$$\wedge^{n-1}(A)$$

$$\int_{\varphi} \omega = \int_B \omega_{\varphi(x)} [D\varphi(x)] dx \quad D\varphi(x) = \underbrace{\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}} \right]}_{n-1} \Bigg\}_n$$

$$\omega_{\varphi(x)} [D\varphi(x)] = \omega_{\varphi(x)} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}} \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \xi_i(\varphi(x)) \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \cancel{\varphi_i}, \dots, \varphi_n)}{\partial(x_1, \dots, x_{n-1})}$$

$$= \det \left(\underbrace{\xi}_1, \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}}_{n-1} \right) \uparrow_n$$

$$= \det(\xi | D\varphi)$$

consideriamo l'applicazione lineare $v \mapsto \det(v, D\varphi)$
 si rappresenta come prodotto scalare
 con un vettore g_{φ} :

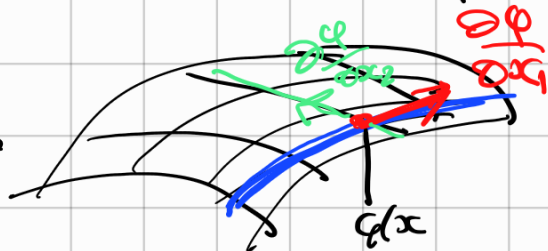
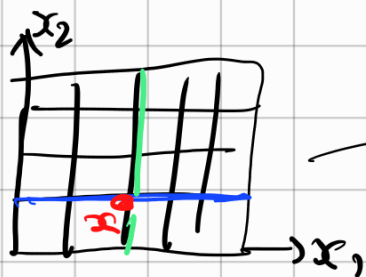
$$\det(v, D\varphi) = g_{\varphi} \cdot v$$

se $\text{rk } D\varphi = n-1$ (massimo), altrimenti $g_{\varphi} = 0$

g_φ è ortogonale allo spazio generato da $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}$

$$\text{(perché } g_\varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \det \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \mid \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \dots \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \dots \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}} \right) = 0)$$

$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ sono vettori tangenti alla superficie parametrizzata da φ .



$\text{Span} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}} \right\} =$ "spazio tangente alla superficie parametrizzata da φ nel punto $\varphi(x)$ "

$g_\varphi = v_\varphi \cdot |g_\varphi|$ dove v_φ è uno dei due vettori ortogonali al l'iperpiano tangente.

Calcoliamo $|g_\varphi|$:

$$|g_\varphi| = g_\varphi \cdot v_\varphi = \det \begin{pmatrix} v_\varphi \\ \vdots \\ D\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \sqrt{\det \begin{pmatrix} v_\varphi \\ \vdots \\ D\varphi \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} v_\varphi \\ \vdots \\ D\varphi \end{pmatrix}} =$$

$$= \sqrt{\det \begin{pmatrix} 1 & \vdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \vdots & D\varphi^t D\varphi \end{pmatrix}} = \sqrt{\det D\varphi^t D\varphi} = \text{determinante jacobiano!}$$

$$g_\varphi = v_\varphi \cdot \sqrt{\det D\varphi^t D\varphi}$$

Dunque:

$$\int_{\varphi} \omega = \int_B \det(\xi, D\varphi(x)) dx$$

$$= \int_B \xi \cdot g_{\varphi} = \int_B \xi \cdot \nu_{\varphi} \underbrace{\sqrt{\det D\varphi^t D\varphi}}_{d\sigma} dx$$

$$=: \int_{\varphi} \xi \cdot \nu_{\varphi} d\sigma \quad \square$$

↑
flusso di ξ attraverso
la superficie parametrizzata
da φ

Lemma [divergenza nel caso generale di un cubo]

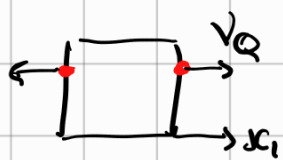
$\xi: [0,1]^k \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ di classe C^1 .

$$\int_{[0,1]^k} \operatorname{div} \xi(x) dx = \sum_{i=1}^k \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_k$$

$$= \sum_{i=1}^k \int_{[0,1]^{k-1}} \int_0^1 \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} dx_i \cancel{dx_1 \dots dx_k}$$

$$= \sum_{i=1}^k \int_{[0,1]^{k-1}} \left[\xi_i \right]_{x_i=0}^1 dx_1 \dots \cancel{dx_i} \dots dx_k$$

$$= \sum_{i=1}^k \int_{[0,1]^{k-1}} \xi_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_k) - \xi_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k$$



$$Q = [0,1]^k$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{[0,1]^{k-1}} \xi \cdot V_Q + \int_{[0,1]^{k-1}} \xi \cdot V_Q$$

$\uparrow$ sulla faccia $x_i=1$ $\uparrow$ sulla faccia $x_i=0$

$$= \int_{\partial Q} \xi \cdot V_Q \quad \square$$

In base alle osservazioni precedenti si ottiene

Teo (Stokes) $\omega \in \Lambda^{k-1}(A)$, A aperto di $\mathbb{R}^n$
 ω di classe C^1

$$\varphi: [0,1]^k \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{di classe } C^1$$

Allora

$$\int_{\varphi} d\omega = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \left(\int_{\varphi \circ \psi_i^+} \omega - \int_{\varphi \circ \psi_i^-} \omega \right)$$

dove $\psi_i^{\pm}: [0,1]^{k-1} \rightarrow [0,1]^k$

$$\psi_i^+(t_1, \dots, t_{k-1}) = (t_1, \dots, t_{i-1}, 1, t_i, \dots, t_{k-1})$$

$$\psi_i^-(t_1, \dots, t_{k-1}) = (t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{k-1})$$

— [ESERCITAZIONE ANTICIPATA] —

dim Si considera $\varphi^* \omega$ e $\varphi^* d\omega = d\varphi^* \omega$

si prende ξ campo vettoriale che rappresenta

$\varphi^* \omega$ e si rilegge il teorema precedente

nel linguaggio delle forme differenziali $\square$

K -superfici parametrizzate

Se denotiamo con $[\varphi]$ la superficie rappresentata da φ definiamo:

$\partial[\varphi]$ la superficie rappresentata

$$\text{da } \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} ([\varphi \circ \varphi_i^+] - [\varphi \circ \varphi_i^-])$$

Così da poter scrivere: $\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega$

con $S = [\varphi]$.

Formalmente si può pensare a $[\varphi]$ come

ad un funzionale lineare: $[\varphi]: \Omega^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$

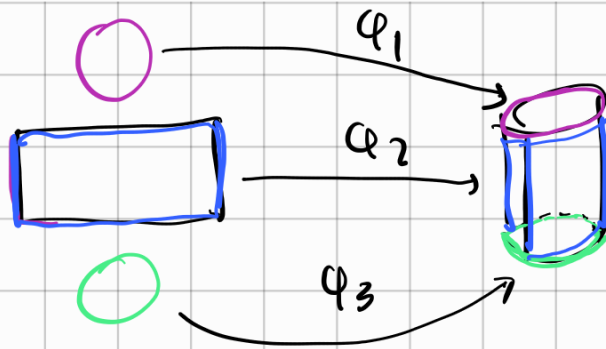
$$[\varphi](\omega) = \int_{\varphi} \omega.$$

Per cui $[\varphi] = [\psi]$ se $\int_{\varphi} \omega = \int_{\psi} \omega \quad \forall \omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$

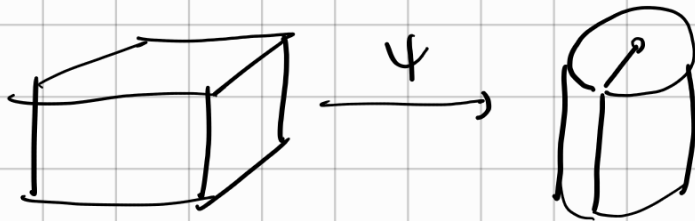
(tecnicamente $[\varphi]$ è una "k-coente verificabile").

Con questa definizione ha senso sommare algebricamente le K -superfici.

Esempio



Superficie del cilindro $S = [\varphi_1] + [\varphi_2] + [\varphi_3]$



Cilindro pieno $T = [\psi]$

Si ha $\partial T = S$,