

ANALISI MATEMATICA 2

LEZIONE 53 - 22.4.2026

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

ANALISI UNO: eq. a variabili separabili
eq. lineari

TEOREMA DELLE CONTRAZIONI (PUNTO FISSO)

Teo (Banach - Caccioppoli) X spazio metrico completo, $X \neq \emptyset$.

Sia

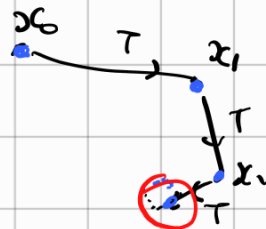
$$T: X \rightarrow X$$

T è L -lipschitz (cioè $d(T(x_1), T(x_2)) \leq L \cdot d(x_1, x_2)$)
con $L < 1$.

Allora $\exists! \bar{x} \in X : T(\bar{x}) = \bar{x}$.

dim Scegli $x_0 \in X$ qualunque e definisci la successione x_n
con $x_{n+1} = T(x_n)$

Mostrare che x_n è di Cauchy.



$$d(x_1, x_2) = d(T(x_0), T(x_1)) \leq L d(x_0, x_1)$$

$$d(x_2, x_3) = d(T(x_1), T(x_2)) \leq L d(x_1, x_2) \leq L^2 d(x_0, x_1)$$

$\vdots$

$$d(x_k, x_{k+1}) = d(T(x_{k-1}), T(x_k)) \leq L d(x_{k-1}, x_k) \leq L^k d(x_0, x_1)$$

x_n è di Cauchy se: $\forall \varepsilon > 0 \exists n \forall k, j > n \quad d(x_k, x_j) < \varepsilon$.
dati $j > k \quad j = k + m$

$$\begin{aligned}
d(x_k, x_j) &= d(x_k, x_{k+m}) \leq d(x_k, x_{k+1}) + d(x_{k+1}, x_{k+2}) + \dots + d(x_{k+m-1}, x_{k+m}) \\
&\leq L^k d(x_0, x_1) + L^{k+1} d(x_0, x_1) + \dots + L^{k+m-1} d(x_0, x_1) \\
&= (L^k + L^{k+1} + \dots + L^{k+m-1}) d(x_0, x_1) \\
&\leq L^k (1 + L + L^2 + \dots) d(x_0, x_1) \\
&= \frac{L^k}{1-L} d(x_0, x_1) < \varepsilon
\end{aligned}$$

se k abbastanza grande
perché $L^k \rightarrow 0$
avendo $L < 1$.

x_k è di Cauchy!

X è completo $\Rightarrow x_k$ converge cioè $\exists \bar{x} \in X$

fc. $x_k \rightarrow \bar{x}$.

T è Lipschitz
 $\Downarrow$

allora $T(x_k) \rightarrow T(\bar{x})$
 $\parallel$

(T è continua)

$x_{k+1} \rightarrow \bar{x}$

Dunque $T(\bar{x}) = \bar{x}$. (punto fisso)

UNICA! sia $\tilde{x}$ un altro punto fisso: $T(\tilde{x}) = \tilde{x}$

$$d(T(\bar{x}), T(\tilde{x})) = d(\bar{x}, \tilde{x})$$

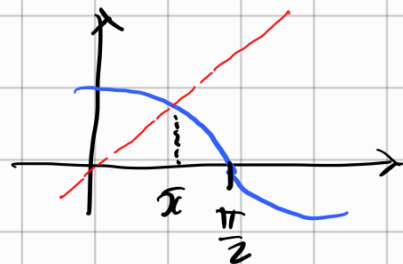
$$\hat{L} d(\bar{x}, \tilde{x})$$

se $d(\bar{x}, \tilde{x}) \neq 0$ ottenendo $L = 1$ assurdo. $\square$

Esempio $\cos x = x$ $T(x) = \cos x$

$$T: [0, 1] \rightarrow [0, \cos 1] \subseteq [0, 1]$$

$$T'(x) = -\sin x \quad |T'(x)| \leq \sin 1 < 1$$



$$T(x_1) - T(x_2) = T'(\xi) (x_1 - x_2) \quad (\text{Lagrange})$$

$$|T(x_1) - T(x_2)| \leq |T'(\xi)| \cdot |x_1 - x_2|$$

$$\leq \sin 1 \cdot |x_1 - x_2|$$

$\Rightarrow T$ è una contrazione.

EQ. DIFFERENZIALI

EQUAZIONE Data y_0 , data f trovare x : $f(x) = y_0$.

EQ. FUNZIONALE L'incognita è una funzione.

Come chiamo l'incognita

u : $y = u(x)$

oppure $u(t), x(t), y(t), y(x), \dots$

EQ. DIFFERENZIALE nell'equazione compare l'operatore derivata.

ORDINARIE

EDO (ODE)

ALLE DERIVATE PARZIALI

EDP (PDE)

↑
Equazioni differenziali

$u = u(x), x \in \mathbb{R}$
 un singolo operatore D
 tipicamente $x = \text{tempo}$.
 NOI RIMANIAMO QUI

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u(x_1, \dots, x_n) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \\ \Delta u = f \\ J = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^2 \end{array} \right. \quad \text{CORSI PIÙ AVANZATI}$$

SIMULTANEITÀ (la funzione e le derivate sono calcolate nello stesso istante x)

$$F(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)) = 0$$

ES $u''(x) = \sin(u(x)) + x^2$

SISTEMI: $y = u(x), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n$

ES: $\underline{u}(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} \quad \begin{cases} u_1'(x) = -u_2(x) \\ u_2'(x) = u_1(x) + u_2(x) \end{cases}$

↑
SISTEMA LINEARE

Def l'ordine di una eq. differenziale è il massimo dell'ordine delle derivate che vi compaiono.

ES $u'' + 2u' + x = 0$ ha ordine 2

ES $(u')^2 + u = 1$ ha ordine 1

EQ LINEARI

NON LINEARI

ES $u'' + u = x^2$ (altrimenti)

Fissati x $F(x, u, \dots, u^{(n)})$ è lineare.

↑ GLA' VISTO (ANALISI UNO)

Oss Possiamo concentrarci sui sistemi del I ordine.

Infatti una equazione (o sistema) di ordine n si riconduce ad un sistema di n equazioni (o sistemi) di ordine 1.

Se l'incognita è $u = u(x)$ e l'equazione è

$$F(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)) = 0$$

posso introdurre l'incognita $\underline{u}(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{pmatrix}$

così $\underline{u}'(x) = \begin{pmatrix} u'(x) \\ \vdots \\ u^{(n)}(x) \end{pmatrix}$

l'equazione diventa: $F(x, u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), u'_1(x))$

Per garantire l'esistenza delle soluzioni
supporremo sempre che l'equazione sia
in forma normale:

ⓧ $u^{(n)}(x) = f(x, u(x), \dots, u^{(n-1)}(x))$ ⓧ eq. di ordine n

Es: $(u')^2 = u \rightarrow u' = \sqrt{u}$
 $\rightarrow u' = -\sqrt{u}$

ⓧⓧ $\begin{cases} u'_1(x) = u_1'(x) = u_2(x) \\ u'_2(x) = u_2'(x) = u_3(x) \\ \vdots \\ u'_n(x) = u_n'(x) = f(x, u_1(x), \dots, u_n(x)) \end{cases}$

$\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix}$

$$\underline{u}'(x) = \underline{f}(x, \underline{u}(x))$$

$$\underline{f}(x, y_1, \dots, y_n) = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ f(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

Teo (Esistenza e unicità locale, Cauchy-Lipschitz)

Consideriamo il PROBLEMA DI CAUCHY:

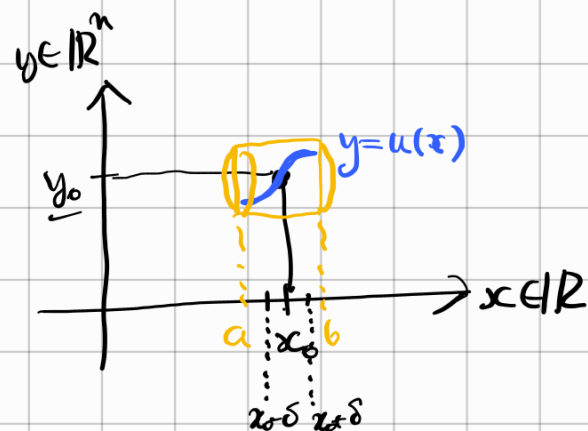
$$(*) \begin{cases} \underline{u}'(x) = \underline{f}(x, \underline{u}(x)) \\ \underline{u}(x_0) = \underline{y}_0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{FISSATI} \\ x_0 \in \mathbb{R} \\ \underline{y}_0 \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

$$\underline{f}: A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Hyp. $A = [a, b] \times \overline{B}_r(\underline{y}_0)$
 $x_0 \in [a, b]$

$$\overline{B}_r(\underline{y}_0) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - \underline{y}_0| \leq r\}$$

$$f: [a, b] \times \overline{B}_r(\underline{y}_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$$



(i) f continua.

(ii) $\exists L > 0 : \forall x \in [a, b] \quad \forall \underline{y}_1, \underline{y}_2 \in \overline{B}_r(\underline{y}_0) :$

$$|f(x, \underline{y}_1) - f(x, \underline{y}_2)| \leq L |\underline{y}_1 - \underline{y}_2|$$

(Lipschitz rispetto ad y uniformemente rispetto a x).

Es $\exists \delta > 0 : \forall I$ intervallo $I \subseteq [a, b] \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$
 $\exists ! u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ che risolve il problema di Cauchy $(*)$.

Perché serve introdurre δ ?

Es $u' = u^2 \Rightarrow u(x) = \frac{1}{c-x}$

↑
variabili separabili

↓
 $u'(x) = f(x, u(x))$

$f(x, y) = y^2$

