

ANALISI MATEMATICA 2

LEZIONE 54 - 23.4.2026

$$\textcircled{*} \begin{cases} \underline{u}'(x) = f(x, \underline{u}(x)) \\ \underline{u}(x_0) = \underline{y}_0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \mathbb{R}^n \\ \cup \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} f: [a, b] \times \overline{B}_r(\underline{y}_0) \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x_0 \in [a, b], \quad \underline{y}_0 \in \mathbb{R}^n \end{matrix}$$

dim (teorema di Cauchy-Lipschitz)

① FORMA INTEGRALE EQUIVALENTE

$\underline{u} \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ e risolvere $\textcircled{*}$



$\underline{u} \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ e risolvere $\textcircled{**}$

$\Downarrow$ integro $\textcircled{*}$

$\Uparrow$ Teo
Fondamento
del
calcolo

$$\textcircled{**} \quad \underline{u}(x) = \underline{y}_0 + \int_{x_0}^x \underline{f}(t, \underline{u}(t)) dt$$



$$\underline{u} = T(\underline{u})$$

operatore di Volterra

posto $\boxed{T(\underline{u})(x) := \underline{y}_0 + \int_{x_0}^x \underline{f}(t, \underline{u}(t)) dt} \quad x \in I.$

Dove definisco T ?

$$I \subseteq [a, b] \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

$$X = \{ \underline{u} \in C^0(I, \overline{B}_r(\underline{y}_0)) \}$$

X con la distanza uniforme: $d_{\infty}(\underline{u}, \underline{v}) = \sup_{x \in I} |\underline{u}(x) - \underline{v}(x)|$

$X \subseteq \mathcal{B}(I, \mathbb{R}^n)$ & funzioni limitate (bounded)
è completo

X è chiuso quindi è completo

(ma) $T: X \rightarrow C^0(I, \mathbb{R}^n)$

② $T(X) \subseteq X$?

Data $u \in X$ $u: I \rightarrow \overline{B_{r_2}(y_0)}$

devo mostrare che:

$\forall x \in I \quad T(u)(x) \in \overline{B_{r_2}(y_0)}$

$$|T(u)(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, u(t)) dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, u(t))| dt \right|$$

$f: [a, b] \times \overline{B_{r_2}(y_0)} \rightarrow \mathbb{R}^n$
 φ è compatto
 $|f|$ è continua su un compatto Weierstraß
 $\exists M > 0 \quad |f| \leq M$

$$\leq \left| \int_{x_0}^x M dt \right| = |x - x_0| \cdot M \leq \delta \cdot M \stackrel{!}{\leq} r_2$$

ovvero se:

$\delta \leq \frac{r_2}{M}$

$T: X \rightarrow X$

② T è una contrazione?

Stimiamo la costante di Lipschitz di T :

$$d_\infty(T(u), T(v)) \leq \tilde{L} \cdot d_\infty(u, v) \quad \forall u, v \in X$$

$\sup_{x \in I} |T(u)(x) - T(v)(x)|$

$$\begin{aligned}
|T(u)(x) - T(v)(x)| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, u(t)) dt - \int_{x_0}^x f(t, v(t)) dt \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, u(t)) - f(t, v(t))| dt \right| \\
&\stackrel{L_{\text{Lip}}}{\leq} \left| \int_{x_0}^x L |u(t) - v(t)| dt \right| \\
&\leq L \left| \int_{x_0}^x \text{doo}(u, v) dt \right| = L \cdot \text{doo}(u, v) \cdot |x - x_0| \\
&\leq L \cdot \text{doo}(u, v) \cdot \delta = \tilde{L} \text{doo}(u, v)
\end{aligned}$$

$$\text{se } \tilde{L} = \delta \cdot L,$$

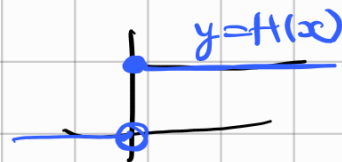
T è $\tilde{L}$ -lipschitz. se $\tilde{L} < 1$ cioè se $\delta < \frac{1}{L}$ allora T è una contrazione.

Se $\delta \leq \frac{\eta}{M}$ e $\delta < \frac{1}{L}$ posso applicare il teorema delle contrazioni $\Rightarrow \exists! u \in X : T(u) = u$.

□

Verifichiamo con due esempi che le ipotesi del teorema sono ottimali

Es 1 $u'(x) = H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$



non ha soluzione perché la derivata di una funzione derivabile non può aver una discontinuità a salto (ANZI UNO).

$$u'(x) = f(x, u(x)) \text{ con } f(x, y) = H(x)$$

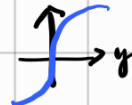
ES 2 (baffo di Peano)

$$\begin{cases} u'(x) = \sqrt[3]{u(x)} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

$$u'(x) = f(x, u(x))$$

con $f(x, y) = \sqrt[3]{y}$

Non è LIPSCHITZ!



Una soluzione è, ovviamente, $u(x) = 0$.

Ci sono altre soluzioni?

Se ci sono almeno una che diverge da 0.

Se u risolve $u' = \sqrt[3]{u}$, in ogni intervallo su cui $u \neq 0$ posso dividere l'equazione per $\sqrt[3]{u}$.

$$\frac{u'(x)}{\sqrt[3]{u(x)}} = 1, \quad \int \frac{u'(x) dx}{\sqrt[3]{u(x)}} = \int 1$$

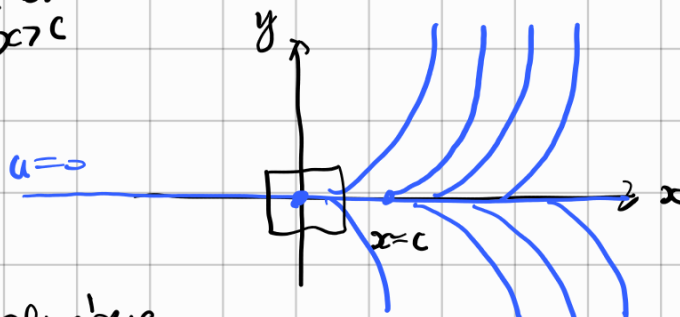
$$\left[\int \frac{du}{\sqrt[3]{u}} \right]_{u=u(x)} = x - c$$

$$\frac{\sqrt[3]{u^2(x)}}{\frac{2}{3}} = x - c$$

$\frac{2}{3}$
 > 0

↑
dove era $x > c$

$$u(x) = \pm \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}(x-c)\right)^3}$$



$u_1(x) \equiv 0$ è soluzione

$$u_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1 \\ \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}(x-1)\right)^3} & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{è un'altra soluzione!}$$

(ogni $c > 0$ mi dà una soluzione diversa)

□

Teo (esistenza locale, Peano) Se f è continua allora l'esistenza locale è garantita (ma non l'unicità).

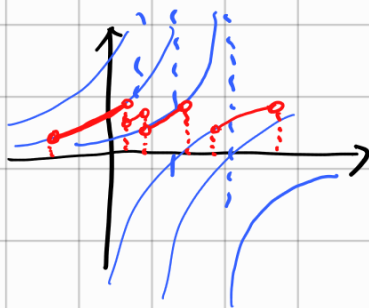
(DIMOSTRAZIONE, FORSE, PIÙ AVANTI)

SOLUZIONI MASSIMALI

Oss se $u: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ risolve una eq. differenziale, ad esempio $u'(x) = u^2(x)$, significa che $\forall x \in A$ si ha $u'(x) = u^2(x)$.

Avvicinante se $B \subseteq A$ $v = u|_B$ è un'altra soluzione!

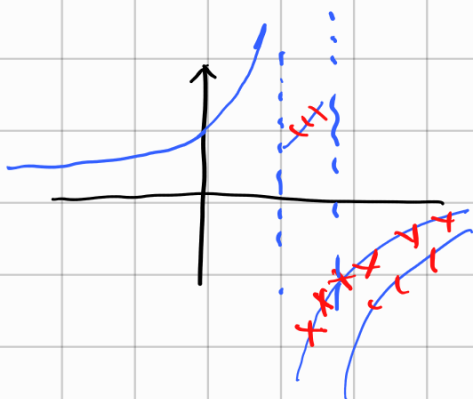
Peggio: se il dominio non è un intervallo, posso unire punti diversi di soluzioni



È naturale che le soluzioni di una eq. differenziale (ordinaria) siano definite su un (unico) intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

$\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = 1 \end{cases}$ ha soluzione $u(x) = \frac{1}{1-x}$, $x < 1$

$$\left(u'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = u^2(x) \right)$$



def Se $u: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $v: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ sono due soluzioni della stessa eq. differenziale e $J \supset I$,
e $v|_I = u$ diremo che la soluzione v
estende la soluzione u .



def Se u non ammette estensioni diremo che
 u è una **soluzione massima**.

es: $u(x) = \frac{1}{1-x}$ con $x < 1$ $I = (-\infty, 1)$

è una soluzione massima di $u' = u^2$.

es 2: $u(x) = \sqrt{\frac{2}{3}}(x-1)^3$ con $x \geq 1$

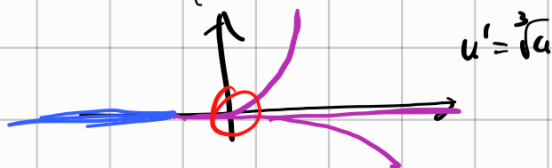
NON è una soluzione massima!



posso estenderla con
 $u=0$ per $x < 1$.

Def L'intervallo su cui è definita una
soluzione massima si dice **intervallo massimale**
di esistenza.

Oss Se l'equazione differenziale non ha unicita'
un soluzione (non massima) potrebbe avere
estensioni diverse



- Teo
- le estensioni monotoni esistono sempre (se f è continua)
 - $\exists!$ una unica estensione monotona (se f è anche lipschitz)