

# ANALISI MATEMATICA 2

## LEZIONE 55 - 24.4.2026

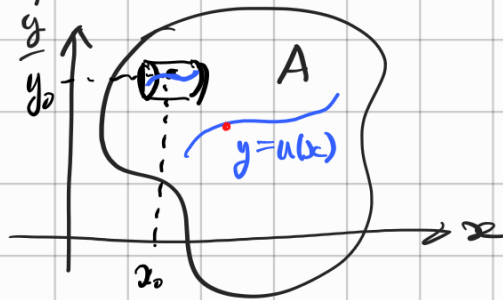
- Ogni relazione può essere estesa fino a diventare una relazione univale

$$u'(x) = f(x, u(x))$$

$$f: A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x, y)$$

Diciamo che  $f$  soddisfa le ipotesi del teorema di  $\exists!$  se per ogni  $(x_0, y_0) \in A$  esiste  $r > 0$  tale che  $f$  ristretta a  $C = [x_0 - r, x_0 + r] \times \overline{B_r}(y_0)$  soddisfa le ipotesi:



(i)  $f|_C$  continua

(ii)  $f|_C$  è Lipschitz rispetto a  $y$  uniformemente rispetto a  $x$ .

Oss se  $f \in C^1 \Rightarrow f \in C^0$  e  $\frac{\partial f}{\partial y_k} \in C^0$  ( $k=1 \dots n$ )



Lagrange + Weierstrass

$f|_C$  soddisfa (i) e (ii).  
 $C^0$  Lipschitz

Es  $u'(x) = \frac{e^{x + \ln u(x)}}{1 - \left(\frac{u(x)}{x}\right)^2}$

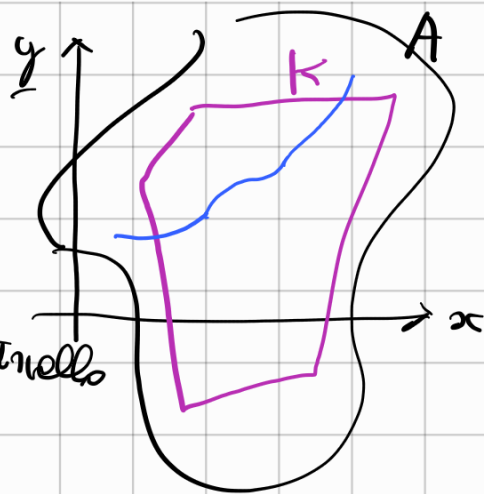
soddisfa le ipotesi di  $\exists!$  locale.

perché  $f(x, y) = \frac{e^{x + \ln y}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}$

$f \in C^1$

Teo (fuga dai compatti)

Sia  $A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  aperto,  
 $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$  soddisfa le  
 ipotesi di  $\exists!$  locale



Allora un solenoide  $u: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo  
 dell'equazione  $u'(x) = f(x, u(x))$

è minimale se e solo se

il grafico di  $u$  "esce" da ogni compatto  $K \subseteq A$ .

$I$  sia verso destra che verso sinistra.

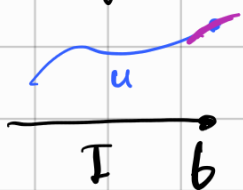
(inoltre  $I$  è aperto)

dim ci basta l'ipotesi  $u$  minimale  $\Rightarrow$   $u$  esce dai  
 compatti  
 $I$  aperto

①  $I$  è aperto. Sia  $u: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  soluzione minimale.

se fosse  $\sup I = b \in I$  potrei considerare

il problema di Cauchy:  $\begin{cases} v' = f(x, v) \\ v(b) = u(b) \end{cases}$  ha  $\exists!$  locale



quindi  $v: (b-\delta, b+\delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$   
 e coincide con  $u$  su  $(b-\delta, b]$ .

dunque  $v$  estende la soluzione  $u$   
 in un piccolo intervallo  $[b, b+\delta)$

ASSURDO:  $u$  era minimale.

Stessa cosa in  $a = \inf I$ .

② Sia  $K \subset A$  compatto,  $u$  sol. minimale  $u: I \rightarrow \mathbb{R}^n$   
 voglio mostrare che  $(x, u(x))$  esce da  $K$ .

Per assurdo supponiamo che non esca:

$\{(x, u(x))\} \subseteq K \Rightarrow \begin{cases} I \text{ è limitata} \\ u \text{ è limitata} \end{cases}$

$\Rightarrow u'(x) = f(x, u(x))$  è limitata!  
perché  $f|_K$  è limitata per Weierstrass.

$$u: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Voglio mostrare che  $u$  può essere estesa nei punti  $a$  e  $b$ .  
Facciamolo in  $b$ .

$\lim_{x \rightarrow b^-} u(x)$  esiste?

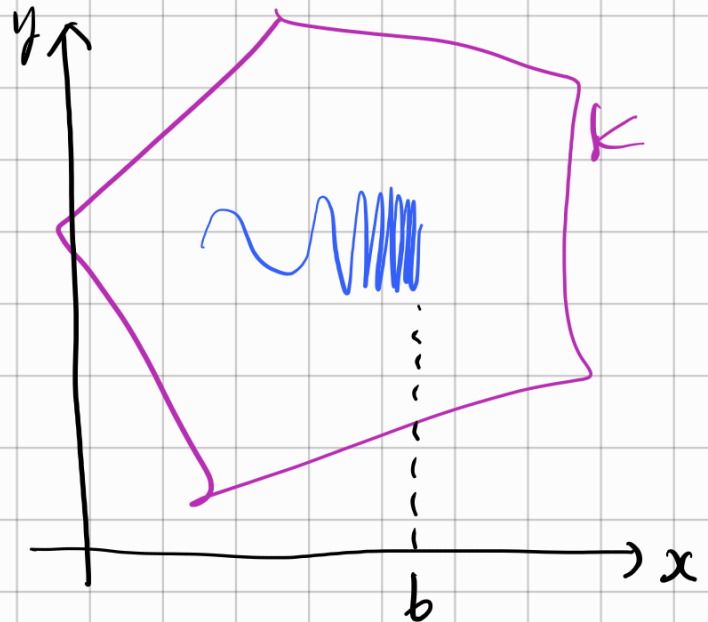
se il limite non esiste

allora  $\limsup_{x \rightarrow b^-} |u'(x)| = +\infty$

$\Downarrow$   
ASSURDO!

perché  $\left\{ \begin{array}{l} - \text{la p.p.s. (} x \text{ } n=1 \text{)} \\ - u \text{ è lipschitz} \Rightarrow \text{uniformemente continua} \Rightarrow \text{si può estendere con continuità alla chiusura del suo dominio.} \end{array} \right.$

|| (le funzioni uniformemente continue mandano successioni di Cauchy in successioni di Cauchy)



□

Es

$$u'(x) = \sin(u^2(x))$$

$u'$  a variabili separabili:

$$\frac{u'}{\sin(u^2)} = 1$$

dopo il calcolo  $\int \frac{du}{\sin(u^2)}$

... NON SI PUO' ESPRIMERE  
MEDIANTE FUNZIONI  
ELEMENTARI

FACIAMO LO STUDIO QUALITATIVO!

① studio il segno della derivata.

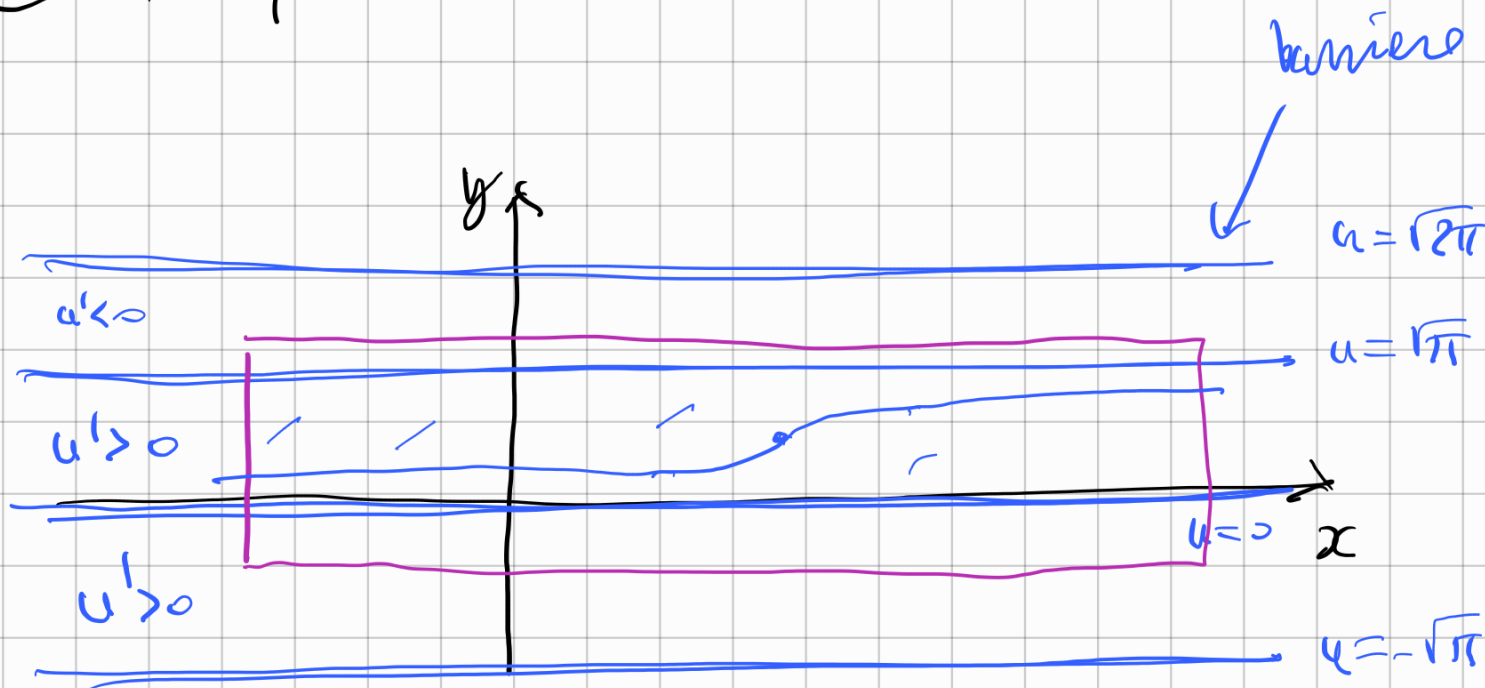
$$u' = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \sin u^2 = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad u^2 = k\pi$$

$$u' \geq 0?$$

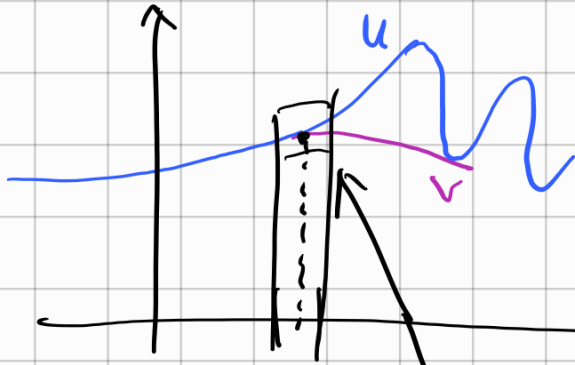
$$\updownarrow \\ u = \pm \sqrt{k\pi}$$

oss  $u(x) = \pm \sqrt{k\pi}$   $\pm$  costante!

② l'equazione ha  $\exists!$  locale.



oss Se  $u$  e  $v$  sono funzioni periodiche  
(e vale  $\exists!$  locale)  $\left\{ \begin{array}{l} \circ \quad u(x) = v(x) \quad \forall x \\ \circ \quad u(x) \neq v(x) \quad \forall x \end{array} \right.$



è ridotta l'unicità locale.

② Se  $u(x_0) \in (0, \sqrt{\pi})$   $u$  è definita  
su tutto  $\mathbb{R}$  (perché esce dai compatti  
ma è costretta in  $y \in (0, \sqrt{\pi})$ )  
 $u: \mathbb{R} \rightarrow (0, \sqrt{\pi}) \Rightarrow u' > 0 \Rightarrow u$  è strett.  
crescente

$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = l$  esiste finito quanto vale?



Oss Se  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile,  $u(x) \rightarrow l \in \mathbb{R}$  per  $x \rightarrow +\infty$   
e se  $u'(x) \rightarrow m \in [-\infty, +\infty]$

allora  $m=0$ .

dim posso usare l'Hôpital.  
oppure Lagrange.

oppure: suppongo  $m > 0 \Rightarrow u'(x) > \frac{m}{2} \quad \forall x \geq a$

$$\left(u(x) - \frac{m}{2}x\right)' > 0 \Rightarrow u(x) - \frac{m}{2}x > u(a) - \frac{m}{2}a$$

$$u(x) > u(a) - \frac{m}{2}a + \frac{m}{2}x \rightarrow +\infty$$

$l = +\infty$  ASSURDO  $\square$

Dunque  $u(x) \rightarrow l$  per  $x \rightarrow +\infty$

$$u'(x) = \sin u^2(x) \rightarrow \sin l^2$$

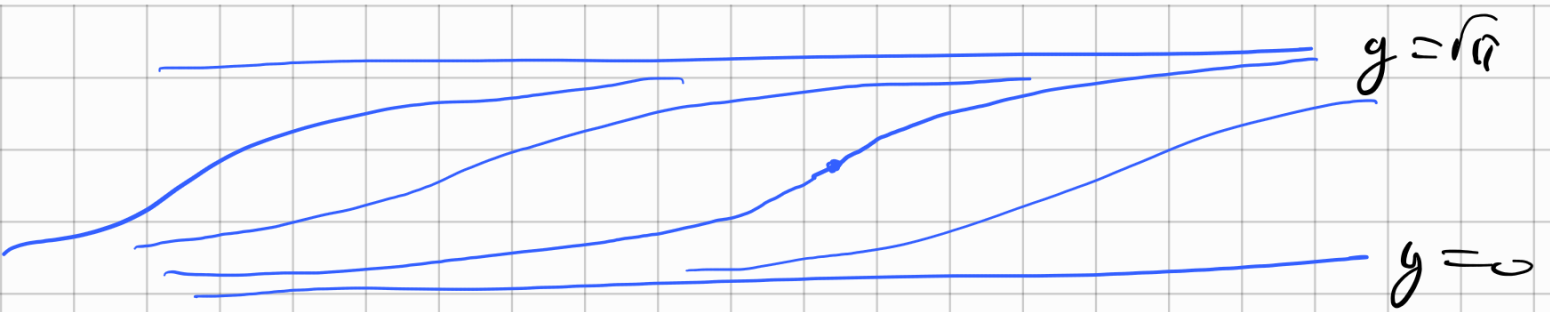
MA per l'osservazione,  $\sin l^2 = 0$

$$u(x) \in (0, \sqrt{\pi}) \Rightarrow l = \sqrt{\pi}$$

$$\Downarrow$$
$$l \in [0, \sqrt{\pi}]$$

dunque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \sqrt{\pi} \quad (\text{se } u(x) \in (0, \sqrt{\pi}))$

Analogamente  $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 0$



oss visto che l'equazione è autonoma

$$[ f(x, y) = \sin y^2 = f(y) ]$$

$$u' = \sin u^2$$

se  $u(x)$  è soluzione su ogni  $T \in \mathbb{R}$

allora  $v(x) = u(x+T)$  è soluzione.

infatti se  $u'(x) = f(u(x))$

$$v'(x) = u'(x+T) = f(u(x+T)) = f(v(x)).$$

$\Rightarrow v$  è soluzione!

③ concavità (OPZIONALE)

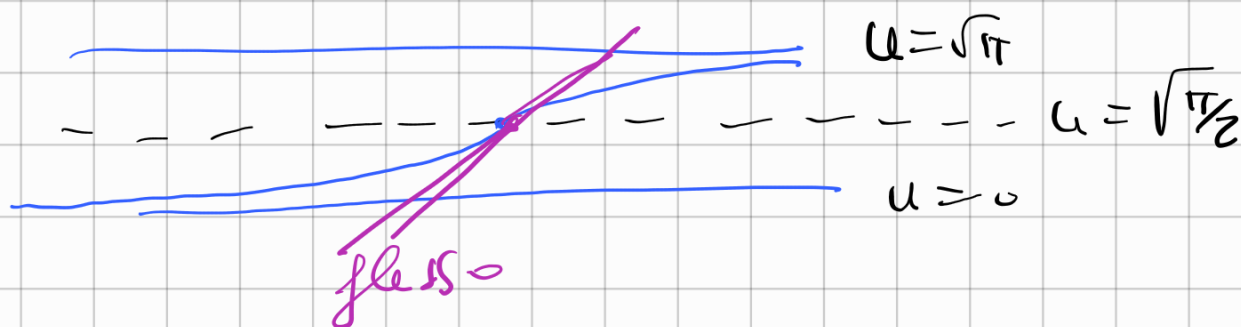
$$u' = \sin u^2 \Rightarrow u'' = (\cos u^2) \cdot 2u \cdot u'$$

$$= \cos u^2 \cdot 2u \cdot \sin u^2$$

$u'' > 0$ ? (ad esempio se  $u \in (0, \sqrt{\pi})$ )

$$\text{se } 0 \leq u^2 < \frac{\pi}{2} \quad 0 \leq u < \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$





④ altre simmetrie?

FORSE se  $u(x)$  è soluzione

anche  $-u(-x)$  è soluzione.

Come si prova?

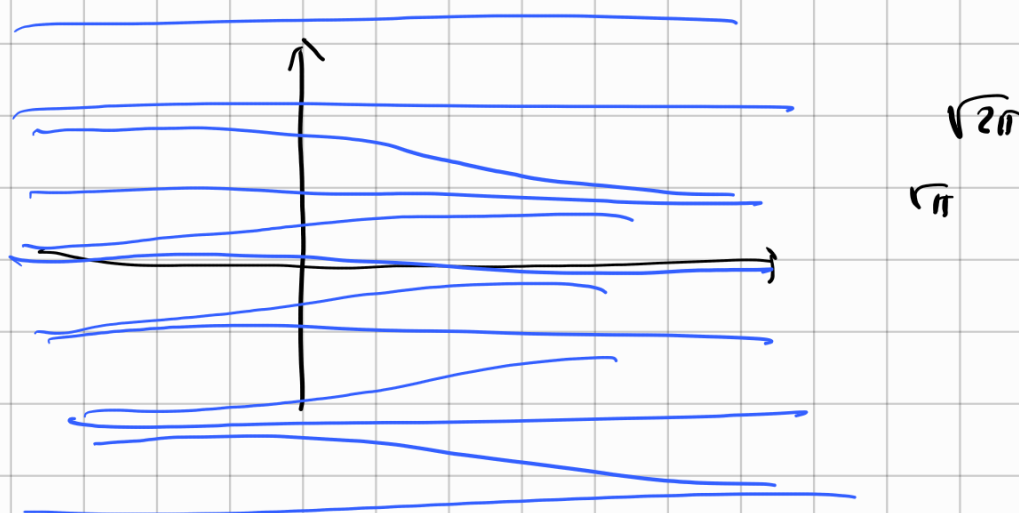
$$v(x) = -u(-x)$$

$$u' = \sin u^2$$

$$\begin{aligned} v' &= +u'(-x) = \sin(u^2(-x)) = \sin((-v(x))^2) \\ &= \sin(v^2(x)) \Rightarrow \text{SI!} \end{aligned}$$

$v$  è soluzione!

l'insieme delle soluzioni ha simmetria centrale.



Potete disegnare il grafico delle soluzioni con FUNPLOT. (E=0)



