

ANALISI MATEMATICA 2

LEZIONE 56 - 30.4.2026

Vorrei ricordarvi che una equazione lineare ha soluzione "globale" cioè sullo stesso intervallo in cui l'equazione ha senso

Teorema (esistenza ^{esistiti} globale)

Sia $f: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) \\ u(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo.

Supponiamo che f soddisfi $\exists!$ locale
inoltre esistono $m, q > 0$ tali che

$$|f(x, y)| \leq m|y| + q \quad \forall x \in I \\ \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Allora la soluzione massima u è globale cioè

$u: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ (lo stesso I in cui è definita f)

dim (lemma di Grönwall)

$$\left| \left[\log(1 + |u(t)|^2) \right]_{x_0}^x \right| = \left| \int_{x_0}^x \frac{2u(t) \cdot u'(t)}{1 + |u(t)|^2} dt \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^x \frac{2|u(t)| \cdot (m|u(t)| + q)}{1 + |u(t)|^2} dt \right|$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^x \left[\frac{2m|u(t)|^2}{1 + |u(t)|^2} + \frac{2q|u(t)|}{1 + |u(t)|^2} \right] dt \right|$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^x (2m + q) dt \right|$$

$$= |x - x_0| (2m + q)$$

$$\frac{2ab}{a^2 + b^2} \leq 1$$

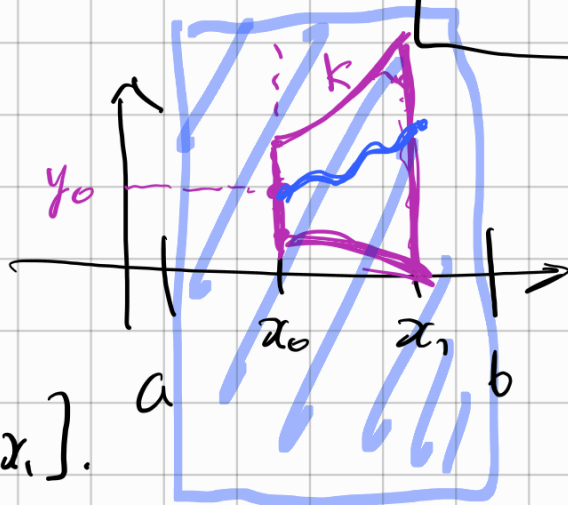
$$(a-b)^2 \geq 0 \uparrow \uparrow$$

in ogni intervallo $[x_0, x_1] \subseteq I$

u è limitata.

Quindi (per il lemma "fuga dai compatti")

u è definita su tutto $[x_0, x_1]$.



Vero per ogni $x_1 \in I$

dunque u è definita su tutto I . $\square$

Osservazione se invece

$$|f(x, y)| \leq m(x) |y| + q(x)$$

se $m, q \in C^0$ allora in ogni intervallo compatto hanno massimo e quindi vale il risultato precedente.

u è definita su ogni $[a, b] \subseteq I \Rightarrow u$ è definita su tutto I .

Esempio $\textcircled{A}$ $u' = \sin(u) + x^3$, $f(x, y) = (\sin y) + x^3$

$$|f| \leq |y| + x^3$$

l'equazione $(*)$ ha esistenza globale $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Teorema (dipendenza continua dal dato iniziale).

$$(*) \begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) \\ u(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (**) \begin{cases} v'(x) = f(x, v(x)) \\ v(x_0) = y \end{cases}$$

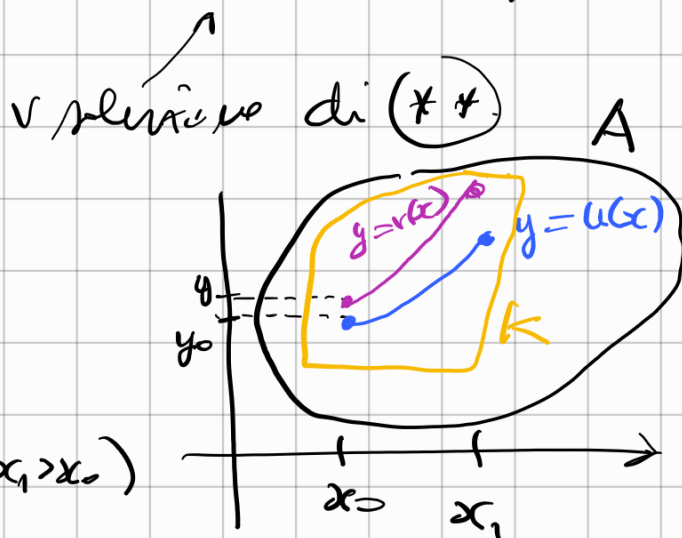
"Per $y \rightarrow y_0$ $v(x) \rightarrow u(x)$ "

$f: A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
Aperto

Sia f che soddisfa $\exists!$ locale.

Sia u una soluzione di $(*)$ definita su $[x_0, x_1]$
 $(x, u(x)) \in A \quad \forall x \in [x_0, x_1]$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |y - y_0| < \delta \Rightarrow |v(x_1) - u(x_1)| < \varepsilon$$



dim Considero un
comparto $K \subset A$,
che contiene un intervallo
del grafico di u .

$(x_1 > x_0)$

localmente $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$

Ipotesi $\exists!$ locale

Sul compatto K la stima diventa uniforme.
(c'è un L che va bene su tutto K).

Devo stimare $\varepsilon(x) = |v(x) - u(x)|$

Supponiamo $y \neq y_0$ così $\varepsilon(x) \neq 0$ per unicità della soluzione.

$$\varepsilon'(x) = \frac{v(x) - u(x)}{|v(x) - u(x)|} (v'(x) - u'(x))$$

$$\begin{aligned} \varepsilon'(x) &\leq |v'(x) - u'(x)| = |f(x, v(x)) - f(x, u(x))| \\ &\leq L |v(x) - u(x)| = L \varepsilon(x). \end{aligned}$$

$$\varepsilon'(x) - L \varepsilon(x) \leq 0$$

$$\varepsilon'(x) e^{-Lx} - L e^{-Lx} \varepsilon(x) \leq 0$$

$$\left(\varepsilon(x) \cdot e^{-Lx} \right)' \leq 0$$

$\varepsilon(x) e^{-Lx}$ è decrescente.

$$\varepsilon(x_1) e^{-Lx_1} \leq \varepsilon(x_0) e^{-Lx_0}$$

$$\varepsilon(x_1) \leq \varepsilon(x_0) e^{L(x_1 - x_0)}$$

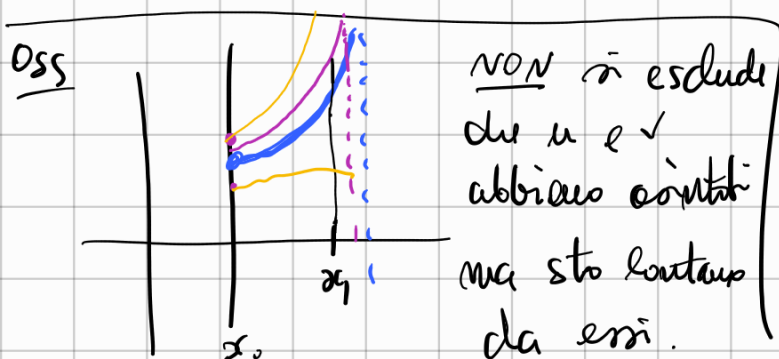
$$= |u(x_0) - v(x_0)| e^{L(x_1 - x_0)}$$

$$= |y_0 - y| e^{L(x_1 - x_0)}$$

$$\leq \delta e^{L(x_1 - x_0)} < \varepsilon$$

$$\text{se } \delta < \varepsilon e^{-L(x_1 - x_0)}$$

□

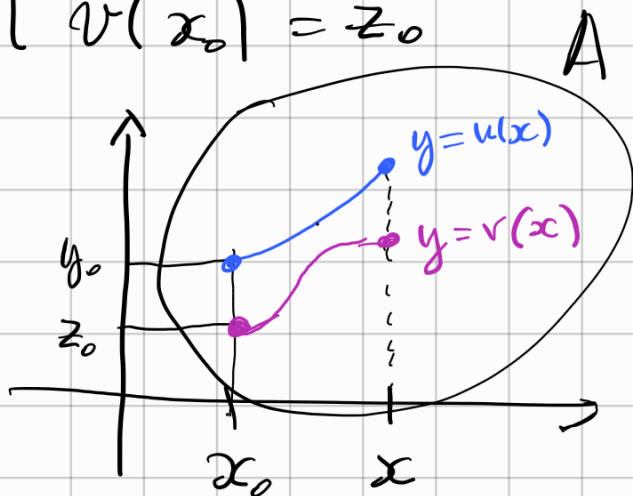


Teorema (di confronto)

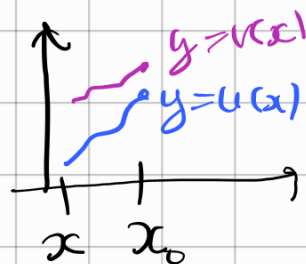
$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) \\ u(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$f, g: A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\begin{cases} v'(x) = g(x, v(x)) \\ v(x_0) = z_0 \end{cases}$$

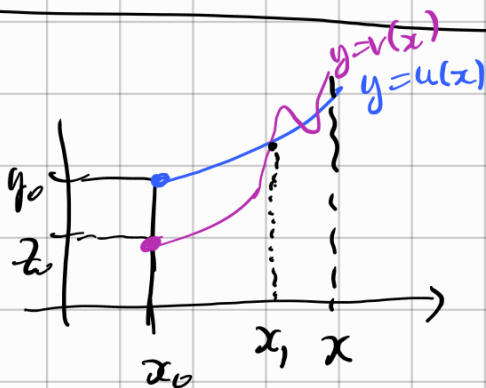
Sia $f(x, y) > g(x, y)$
 $\forall (x, y) \in A$.



- se $y_0 > z_0$ allora $u(x) > v(x) \quad \forall x > x_0$.
- se $y_0 < z_0$ allora $u(x) < v(x) \quad \forall x < x_0$.



dim $(y_0 > z_0)$



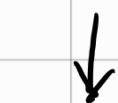
per assurdo
 $\exists x > x_0$
t.c. $u(x) \leq v(x)$

$$x_1 = \min \{x \geq x_0 : u(x) \leq v(x)\}$$

Allora $u(x) > v(x) \quad \forall x < x_1$.
 $u(x_1) = v(x_1)$

$$\frac{u(x_1) - u(x)}{x_1 - x} < \frac{v(x_1) - v(x)}{x_1 - x}$$

per $x \rightarrow x_1^-$



$$u'(x_1) \leq$$



$$v'(x_1)$$

"

$$f(x_1, u(x_1))$$



↑
ipotesi

"

$$g(x_1, v(x_1))$$

"
 $u(x_1)$

ASSURDO!

□

Oss Con le disuguaglianze larghe il risultato è molto più difficile da dimostrare, anzi richiede 3! locale.

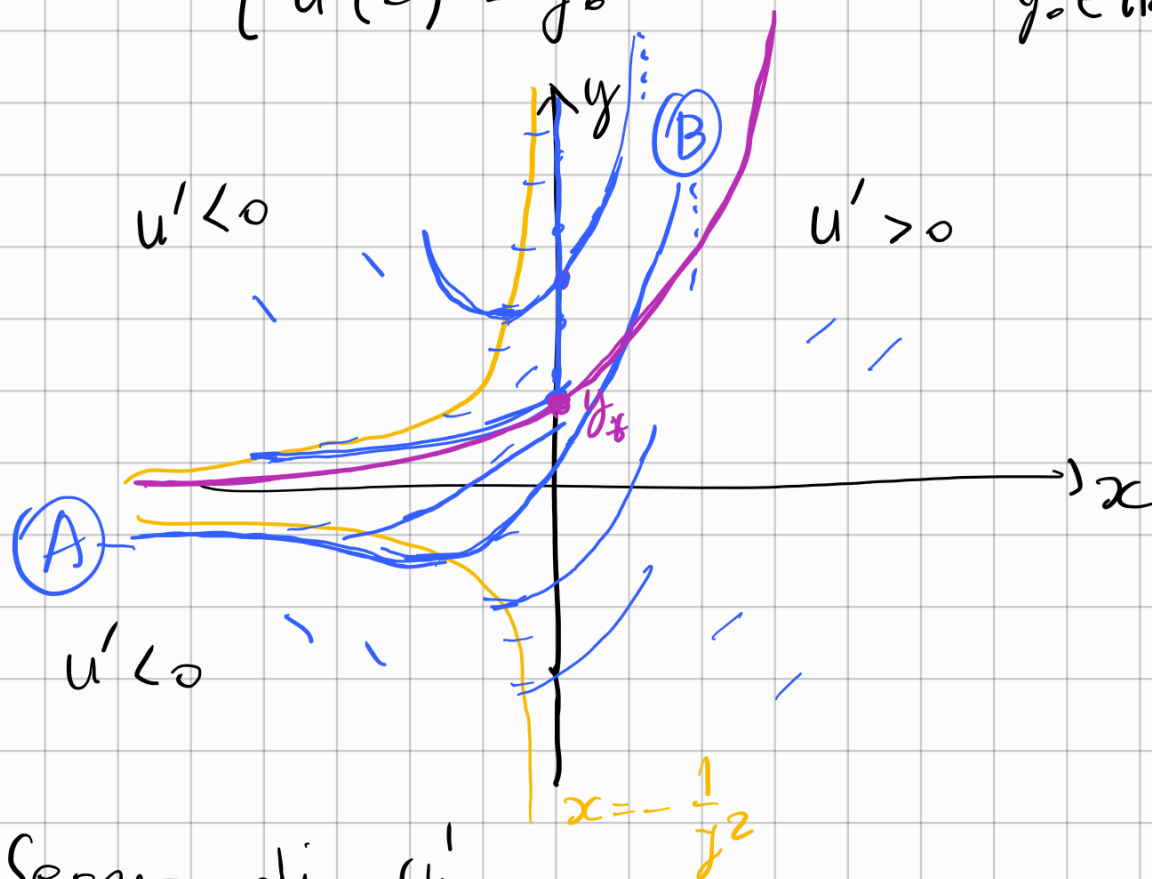


ESEMPIO

$$\begin{cases} u' = x u^2 + 1 \\ u(0) = y_0 \end{cases}$$

$$f(x, y) = x y^2 + 1$$

$$y_0 \in \mathbb{R}$$



① Segno di u'

$$u' > 0 \Leftrightarrow x u^2 + 1 > 0$$

$$y = u(x)$$

$$x y^2 + 1 > 0$$

$$x y^2 > -1$$

$$x > -\frac{1}{y^2}$$

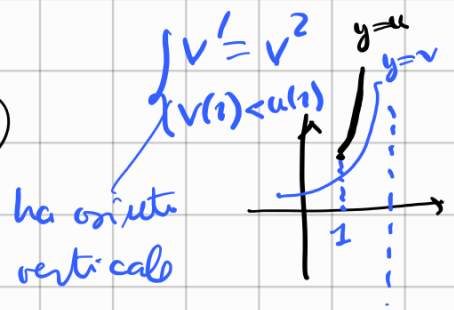
Ⓐ c'è asintoto $y=0$? (per caso, vedi
ultimo scorso)

Ⓑ c'è asintoto verticale?

}

$$u' = xu^2 + 1 > xu^2 \geq u^2$$

$$x(x > 1)$$



Uso confronto:

$$u(x) > v(x) \quad \forall x > 1$$

$\Rightarrow u$ ha un asintoto come v !
 (anzi prima di v)

Esercizio

$\exists! y^*$

t.c.

$$\begin{cases} u' = xu^2 + 1 \\ u(0) = y^* \end{cases}$$

per $x < 0$

$$-\frac{1}{\sqrt{x}} < u(x) < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$x = -\frac{1}{y^2}$$

