

Soluzioni prova scritta parziale n. 3

Analisi Matematica 2

Corso di Studi in Matematica

21 maggio 2026

1. Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la curva $\gamma: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = (t(9 - t^2), (t^2 - 1)(t^2 - 4) - \alpha), \quad t \in [-3, 3].$$

- (a) Nel caso $\alpha = 0$ trovare le intersezioni di γ con gli assi coordinati; [3 punti]
(b) Calcolare

$$\int_{\gamma} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{4, 40\}$. [7 punti]

Soluzione. Sia $\alpha = 0$. La curva incontra l'asse delle ascisse quando $y = 0$, cioè quando si annulla il polinomio $(t^2 - 1)(t^2 - 4)$ ovvero quando $t = \pm 1$ o $t = \pm 2$. In corrispondenza di questi valori di t si ottengono quattro punti di intersezione: $(\pm 8, 0)$ e $(\pm 12, 0)$. Le intersezioni con l'asse delle ordinate si hanno per $t = 0$ e $t = \pm 3$, da cui si ottengono i punti $(0, 4)$ e $(0, 40)$. In particolare si nota che $\gamma(3) = \gamma(-3)$, cioè la curva è chiusa.

La forma differenziale è ben nota, si tratta infatti del più semplice esempio di forma chiusa ma non esatta. E' facile verificare che la forma è chiusa in quanto

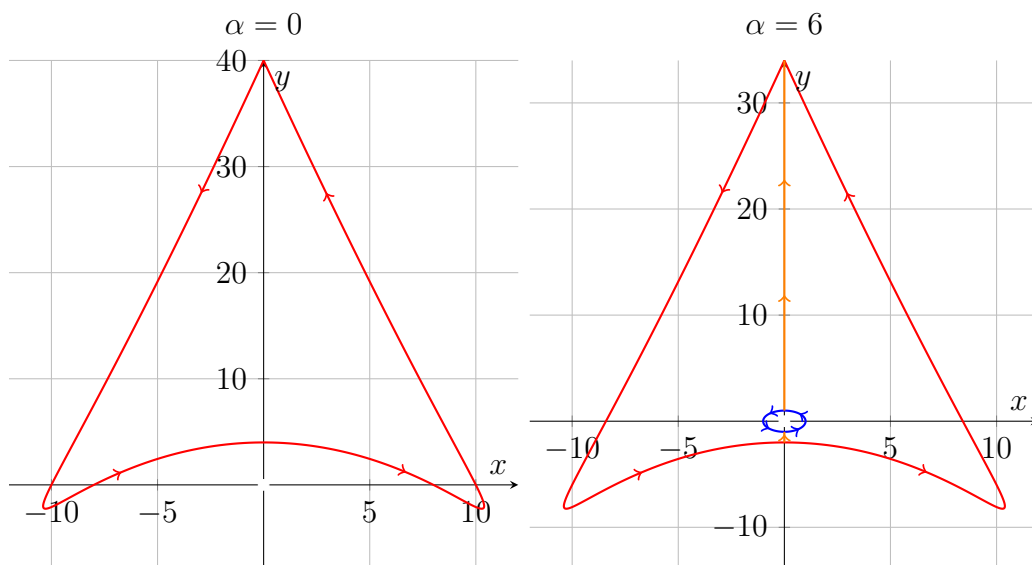
$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Allora per l'integrale è nullo su ogni curva contenuta in un aperto stellato. Come aperto stellato Ω possiamo prendere il piano $\mathbb{R}^2$ privato della semiretta dell'asse delle y negative. Visto che la curva non attraversa mai questa semiretta è chiaramente contenuta in Ω e dunque l'integrale è nullo per $\alpha = 0$.

Per α generico le intersezioni con l'asse delle y si traslano in basso di α e sono dunque $(0, 4 - \alpha)$ e $(0, 40 - \alpha)$. Se $\alpha < 4$ il ragionamento fatto per $\alpha = 0$ rimane valido, e dunque l'integrale è nullo. Se $\alpha > 40$ la curva non interseca mai la semiretta dell'asse delle y positive e dunque si può fare un discorso analogo considerando l'aperto stellato complementare di tale semiretta.

Se $\alpha \in (4, 40)$ la curva interseca entrambe le semirette dell'asse delle y e si avvolge una volta intorno all'origine girando in senso antiorario. Sapendo che l'integrale è invariante per omotopia possiamo rimpiazzare la curva γ con la circonferenza unitaria orientata in senso antiorario: $\eta(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Su questa curva (come è noto) l'integrale diventa banale:

$$\int_0^{2\pi} \frac{-\sin t(-\sin t) + \cos t}{1} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$



Senza usare l'invarianza per omotopia possiamo decomporre la differenza $\int_{\gamma} \omega - \int_{\eta} \omega$ in due pezzi tagliando, ad esempio, lungo l'asse delle y. Prendiamo α la curva che percorre il segmento da $(0, 4 - \alpha)$ a $(0, 40 - \alpha)$ e β la curva che percorre il segmento da $(0, 40 - \alpha)$ a $(0, -1)$ e γ la curva che percorre il segmento da $(0, -1)$ a $(0, 4 - \alpha)$, e consideriamo γ^- la curva γ ristretta a $[-3, 0]$, γ^+ la restrizione a $[0, 3]$, η^- la semicirconferenza da $(1, 0)$ a $(-1, 0)$ e η^+ la semicirconferenza da $(-1, 0)$ a $(1, 0)$.

Allora si ha

$$\int_{\gamma} \omega - \int_{\eta} \omega = \left[\int_{\gamma^+} \omega + \int_{\alpha} \omega - \int_{\eta^-} \omega + \int_{\beta} \omega \right] \\ \left[- \int_{\beta} \omega + \int_{\eta^+} \omega - \int_{\alpha} \omega + \int_{\gamma^-} \omega \right].$$

Osserviamo che la prima parentesi è nulla perché si tratta dell'integrale di una curva chiusa contenuta in un aperto stellato (la curva è contenuta nel semipiano $x \leq 0$ e non tocca l'origine) e, analogamente, la seconda parentesi è nulla perché si tratta dell'integrale di una curva chiusa contenuta in un aperto stellato (la curva è contenuta nel semipiano $x \geq 0$ e non tocca l'origine).

Dunque, se $\alpha \in (4, 40)$ si ha $\int_{\gamma} \omega = \int_{\eta} \omega = 2\pi$.

□

2. Dato $u_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ studiare le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{u + x^2}, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

In particolare:

- (a) dimostrare che per ogni $u_0 \neq 0$ la soluzione massimale è definita su un intervallo superiormente illimitato; [4 punti]
- (b) dimostrare che esiste $\bar{u}_0 > 0$ tale che se $u_0 \geq \bar{u}_0$ allora l'intervallo massimale di esistenza della soluzione è tutto $\mathbb{R}$; [2 punti]

- (c) dimostrare che se $u_0 < 0$ allora $u(x) + x^2 \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$; [2 punti]
- (d) dimostrare che esiste un unico $u_0 \in \mathbb{R}$ per cui la soluzione massimale è definita su tutto $\mathbb{R}$ e $u(x) + x^2 \rightarrow 0$ per $x \rightarrow -\infty$ (suggerimento: l'unicità è forse più semplice dell'esistenza). [2 punti]

Soluzione. Osservazioni preliminari: la funzione $f(x, y) := \frac{1}{y + x^2}$ è definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{y = -x^2\}$ e, nel suo dominio di definizione, è C^∞ . In particolare, la funzione è continua, localmente Lipschitziana nella seconda variabile. Siamo quindi nelle ipotesi di esistenza e unicità locale. Questo garantisce l'esistenza e unicità della soluzione massimale. Sia (α, β) l'intervallo massimale, con $\alpha < 0 < \beta$. Osserviamo inoltre che la parabola $y = -x^2$ sconnette il piano in due regioni: nella regione $y > -x^2$ vale $f > 0$ (quindi u crescente), nella regione $y < -x^2$ vale $f < 0$ (quindi u decrescente).

Esistenza globale nel futuro: illustriamo graficamente gli scenari possibili, considerando unicamente l'informazione data dal segno di f .

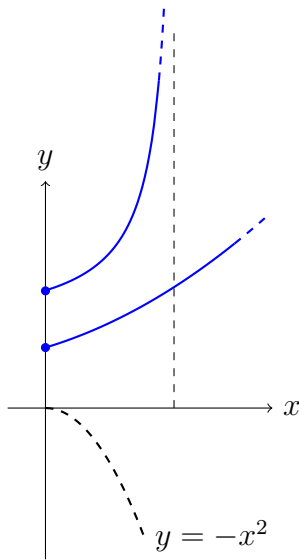


Figura 1: Per $u_0 > 0$ la soluzione è crescente. In blu: scenari a priori possibili per $x > 0$ e $u_0 > 0$.

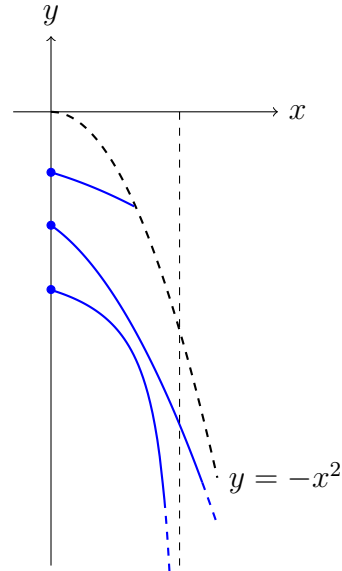


Figura 2: Per $u_0 > 0$ la soluzione è decrescente. In blu: scenari a priori possibili per $x > 0$ e $u_0 < 0$.

Sia $u_0 > 0$ fissato. Allora u è crescente in $[0, \beta)$. Grazie alla monotonia, ci basta dimostrare che u non ha asintoti verticali. Questo è vero perché per ogni $x > 0$

$$u(x) + x^2 \geq u(x) \geq u_0 > 0$$

dunque

$$u'(x) = \frac{1}{u(x) + x^2} \leq \frac{1}{u_0}$$

e

$$u(x) = u_0 + \int_0^x u'(t) dt \leq u_0 + \frac{x}{u_0}.$$

Si poteva giungere alla stessa conclusione trovando opportune soprasoluzioni definite per ogni tempo positivo oppure applicando il teorema di esistenza globale.

Sia ora $u_0 < 0$ fissato. Allora u è decrescente in $[0, \beta)$. Grazie alla monotonia, sono possibili solo tre scenari:

- (i) $\beta < +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow \beta^-} u(x) = -\infty$;
- (ii) $\beta < +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow \beta^-} u(x) = -\beta^2$;
- (iii) $\beta = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow \beta} u(x) = -\infty$.

Per ottenere la tesi ci basta escludere i primi due: (i) è impossibile perché si avrebbe $u'(x) = \frac{1}{u(x)+x^2} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow \beta^-$; (ii) è impossibile perché si avrebbe $u(x) < -x^2$ per ogni $x \in [0, \beta)$ e $\lim_{x \rightarrow \beta^-} u'(x) = -\infty$ (oppure perché $u'(x) \rightarrow -\infty$ per $x \rightarrow \beta^-$, da cui si avrebbe $u(x) > -x^2$ in un intorno sinistro di β)

Esistenza globale nel passato per u_0 abbastanza grande: grazie allo studio fatto precedentemente, cerchiamo $\overline{u_0}$ tra i dati iniziali positivi. Ricordiamo che in questo caso le soluzioni associate sono monotone crescenti. Per dimostrare la tesi ci basta quindi mostrare, ad esempio, che per dato iniziale abbastanza grande, le soluzioni sono limitate dal basso da 0 (questo esclude la presenza di asintoti verticali a $-\infty$ e la collisione con la parabola $\{y = -x^2\}$).

Consideriamo la funzione ausiliaria

$$v(x) = -\frac{1}{x}.$$

Tale funzione è definita in tutto $(-\infty, 0)$ e soddisfa

$$v'(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Consideriamo ora una soluzione u che all'istante $x = -1$ si trovi sopra al grafico di v , cioè $u(-1) > 1$. Sia $I := (\gamma, -1)$ l'intervallo, verso tempi "passati", in cui tale u è positiva. Confrontiamo u e v in I : sfruttando il segno di u otteniamo

$$u(x) + x^2 \geq x^2 \quad \Rightarrow \quad u'(x) \leq v'(x) \quad \text{in } I.$$

Quindi, per il criterio del confronto, $u(x) \geq v(x)$ in I . Poiché $v > 0$ per ogni $x < 0$, concludiamo che $u > 0$ per ogni $x < 0$, cioè $I = (-\infty, -1)$ e $\alpha = -\infty$. Sia $\overline{u_0} := u(0)$ cioè il dato iniziale di questa particolare soluzione. Per unicità della soluzione, ogni u con $u(0) \geq \overline{u_0}$ è limitata dal basso da 0.

Studio asintotico a $+\infty$ di $u(x) + x^2$ con $u_0 < 0$: sia u_0 . Consideriamo la funzione ausiliaria

$$v(x) = u(x) + x^2.$$

Essa soddisfa

$$\begin{cases} v'(x) = \frac{1}{v(x)} + 2x =: g(x, v(x)), \\ v(0) = u_0 < 0. \end{cases}$$

Per lo studio effettuato precedentemente, v è definita per ogni $x > 0$. Inoltre, poiché g non è definita per $y = 0$, deduciamo che il grafico di v per $x > 0$ è contenuto nel quarto quadrante. In tale quadrante, la funzione g si annulla sulla curva $y = -1/(2x)$, è negativa al di sopra di essa, positiva al di sotto. Poiché $v(0) < 0$, esiste $x_1 > 0$ tale che v è decrescente in $(0, x_1)$, $v'(x_1) = 0$, e v crescente in

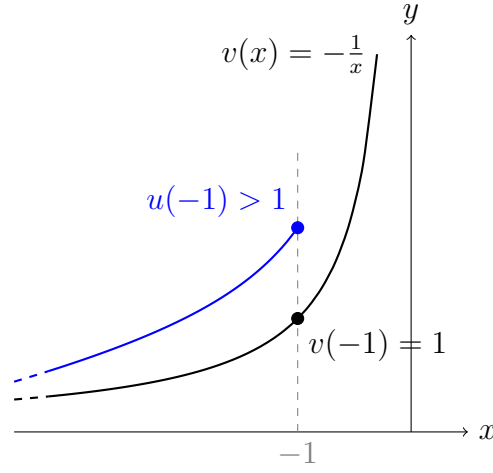


Figura 3: Costruzione di u globale nel passato sfruttando la limitazione dal basso con $v(x) = -1/x$.

$(x_1, +\infty)$. In particolare, la v è definitivamente monotona crescente, quindi esiste $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = \ell \leq 0$. Supponiamo per assurdo che $\ell \neq 0$, allora si avrebbe

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} v'(x) = +\infty$$

assurdo per il criterio dell'asintoto. L'unica possibilità è quindi che $\ell = 0$, cioè $v(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$, cioè $u(x) + x^2 \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$.

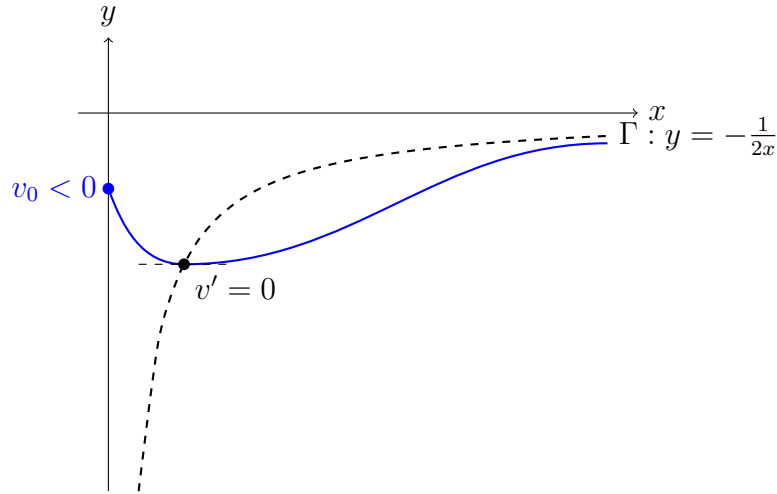


Figura 4: Studio del problema ausiliario $v' = 1/v + x$ con dato iniziale $v_0 < 0$, nel futuro.

Studio asintotico a $-\infty$ di $v(x) = u(x) + x^2$: osservazione preliminare. Osserviamo innanzitutto che il dato iniziale va cercato tra i dati positivi: per monotonia, le soluzioni con $u_0 < 0$ non possono essere definite fino a $-\infty$. Come nel punto precedente, consideriamo il problema ausiliario risolto da $v(x) = u(x) + x^2$:

$$\begin{cases} v'(x) = \frac{1}{v(x)} + 2x, & x < 0 \\ v(0) = v_0 > 0. \end{cases}$$

La tesi diventa: esiste un unico dato iniziale positivo per cui $v \rightarrow 0$ per $x \rightarrow -\infty$.

Studio asintotico a $-\infty$ di v : unicità del dato per cui $v \rightarrow 0$. Supponiamo per assurdo che esistano due soluzioni $v_1 \neq v_2$ con dati iniziali $0 < v_1 < v_2$ tali che $\lim_{x \rightarrow -\infty} v_i = 0$. Consideriamo la funzione differenza $w := v_2 - v_1$. Allora $w > 0$ per ogni $x < 0$ e $w \rightarrow 0$ per $x \rightarrow -\infty$. Inoltre $0 < v_i(x) \leq v_i(0)$ e

$$w'(x) = \frac{1}{v_2(x)} - \frac{1}{v_1(x)} = -\frac{w(x)}{v_1(x)v_2(x)} \leq -\frac{w(x)}{v_1(0)v_2(0)}.$$

Quindi

$$\frac{w'(x)}{w(x)} \leq -\frac{1}{v_1(0)v_2(0)} \quad \forall x < 0.$$

Questo porta ad un assurdo perché si otterrebbe che $w \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow -\infty$:

$$\int_x^0 \frac{w'}{w} \leq \int_x^0 -\frac{1}{v_1(0)v_2(0)} \Rightarrow w(x) \geq e^{\ln(v_2(0)-v_1(0)) - \frac{x}{v_1(0)v_2(0)}}.$$

Studio asintotico a $-\infty$ di v : esistenza di dati iniziali per cui $v \rightarrow 0$. Sia $\Gamma = \{y = -1/(2x)\}$. Consideriamo le due famiglie seguenti di dati iniziali:

$$B = \{v_0 > 0 : v \text{ interseca } \Gamma \text{ nel passato}\}$$

$$A = \{v_0 > 0 : v \text{ non interseca } \Gamma \text{ nel passato e } \alpha > -\infty\}.$$

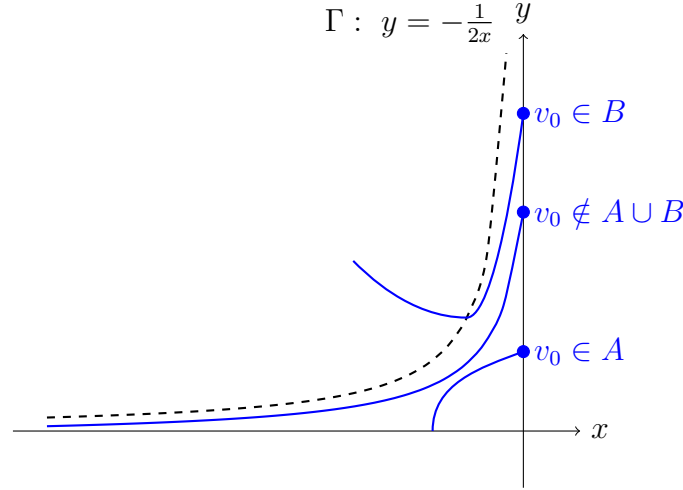


Figura 5: Studio del problema ausiliario $v' = 1/v + x$ con dato iniziale $v_0 > 0$, nel passato.

Utilizziamo la notazione $v(\cdot; x_1, y_1)$ per indicare la soluzione del problema di Cauchy con dato $v(x_1) = y_1$. È immediato verificare che $B \neq \emptyset$: dato $(x_1, y_1) \in \Gamma$ il dato iniziale $v_0 := v(0; x_1, y_1)$ appartiene ad B (in altre parole, è sufficiente partire da un punto di Γ e ricostruire il dato iniziale corrispondente). Per unicità della soluzione e per monotonia, B è un intervallo superiormente illimitato: se $v_0 \in B$ allora $(v_0, +\infty) \subset B$. L'intervallo B è aperto: supponiamo per assurdo che $b = \inf B$ sia un punto minimo. Per costruzione $v(\cdot; 0, b)$ interseca Γ . Sia (x_1, y_1) il punto di intersezione (con $x_1 < 0$). Consideriamo ora $v(\cdot; x_2, y_2)$ con $(x_2, y_2) \in \Gamma$ e $x_2 < x_1$. Allora $v(\cdot; x_2, y_2) < v(\cdot; x_1, y_1) = v(\cdot; 0, b)$. In particolare $v(0; x_2, y_2) < b$. Questo è assurdo perché poiché $v(\cdot; x_2, y_2)$ per costruzione interseca Γ , vale $v(0; x_2, y_2) \in B$. Passiamo ora all'analisi della topologia dell'insieme A . Dimostriamo che $A \neq \emptyset$: grazie alla monotonia, otteniamo che

$$0 < v(x) \leq v_0 \quad \forall x < 0.$$

Quindi

$$\frac{1}{v(x)} \geq \frac{1}{v_0} \quad \Rightarrow \quad v'(x) \geq \frac{1}{v_0} + 2x \quad \forall x \in (\alpha, 0).$$

Quindi

$$v(x) \leq x^2 + \frac{x}{v_0} + v_0 \quad \forall x \in (\alpha, 0).$$

In altre parole v è confinata tra l'asse $y = 0$ e la parabola $y = x^2 + x/v_0 + v_0$. Per v_0 abbastanza piccolo la parabola interseca l'asse $y = 0$, infatti il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 + \frac{x}{v_0} + v_0 \\ y = 0 \end{cases}$$

ha soluzioni (negative) per

$$\frac{1}{v_0^2} - 4v_0 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_0^3 \leq \frac{1}{4}.$$

L'insieme A è un intervallo, limitato inferiormente da 0: se $v_0 \in A$, allora $(0, v_0) \subset A$. Dimostriamo ora che $a = \sup A$ non è un massimo. Supponiamo per assurdo che a sia un punto di massimo e sia $\alpha > -\infty$ l'estremo sinistro dell'intervallo di esistenza della soluzione massimale associata. Consideriamo la soluzione $\bar{v}$ del problema di Cauchy con dato $\bar{v}(\alpha) = \delta > 0$, il cui valore sarà fissato in seguito. Consideriamo l'intervallo temporale $(\alpha - 1, \alpha)$. Se $\bar{v}$ smette di esistere prima di $\alpha - 1$ abbiamo finito: l'estremo inferiore del suo intervallo di esistenza è finito, e il dato iniziale $\bar{v}(0)$, per unicità della soluzione, è necessariamente maggiore di a . Questo è assurdo per massimalità di a in A . Se invece $\bar{v}$ è definita almeno in $I := (\alpha - 1, \alpha)$, allora

$$\bar{v}'(x) \geq \frac{1}{\delta} + 2(\alpha - 1) \quad \forall x \in I.$$

Quindi $\bar{v}$ è limitata dall'alto da una retta:

$$\bar{v} \leq \left[\frac{1}{\delta} + 2(\alpha - 1) \right] (x - \alpha) + \delta =: r(x).$$

Osserviamo che per δ piccolo, la pendenza di $r(x)$ è positiva e $r(0) > 0$. Determiniamo il punto di intersezione tra la retta e l'asse $y = 0$:

$$r(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\delta \left[\frac{1}{\delta} + 2(\alpha - 1) \right]^{-1} + \alpha.$$

Imponiamo che il punto di intersezione sia maggiore o uguale a $\alpha - 1$:

$$-\delta \left[\frac{1}{\delta} + 2(\alpha - 1) \right]^{-1} + \alpha \geq \alpha - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \delta^2 - 2(\alpha - 1)\delta \leq 1$$

che è chiaramente vero per δ piccolo. Deduciamo quindi che anche $\bar{v}$ ha tempo di vita finito nel passato, in particolare $\bar{v}(0) \in A$. Poiché $\bar{v}(\alpha) > 0$, si ottiene $\bar{v}(0) > a$. Che è assurdo per massimalità di a in A .

Possiamo quindi concludere che l'intervallo di dati iniziali $[a, b]$ è non vuoto e corrisponde alle soluzioni che non intersecano mai Γ nel passato e hanno tempo di vita infinito (nel passato).

□